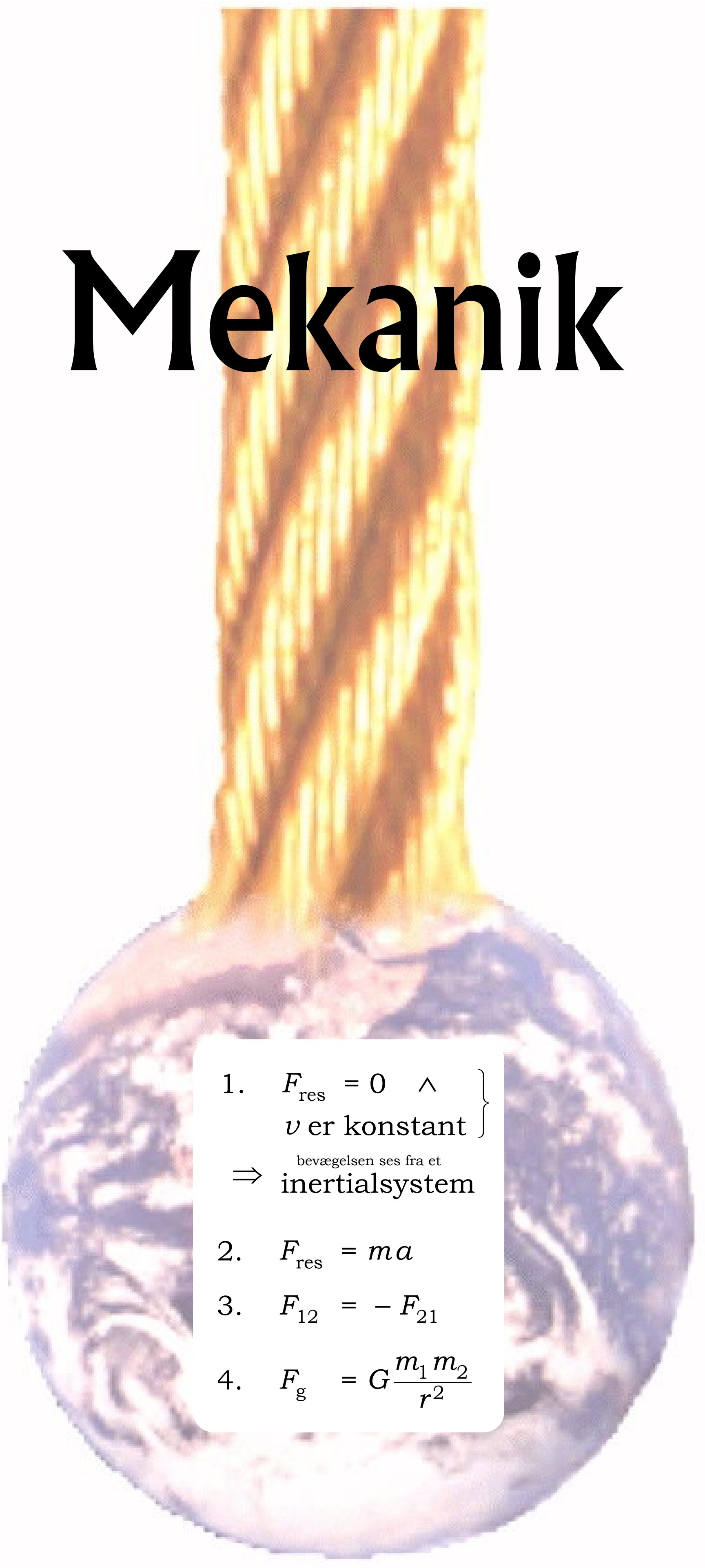
Mekanik



1. $F_{\text{res}} = 0 \;\wedge\; v$ er konstant $\Rightarrow$ bevægelsen ses fra et inertialsystem

2. $F_{\text{res}} = ma$

3. $F_{12} = -F_{21}$

4. $F_{\text{g}} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

Indholdsfortegnelse

Mekanik

Mekanikken er den del af fysikken der forklarer bevægelsen af legemer, væsker eller gasser. Inden for mekanikken skelner man mellem kinematik og dynamik.

Kinematikken er i sit væsen ren matematik i hvilken begreberne blot har fået navne så de umiddelbart kan anvendes i en fysisk sammenhæng, (se afsnit 1.2).

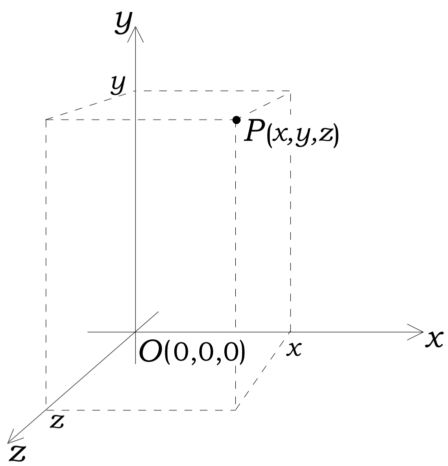
Dynamikken er læren om *kræfter* og *masser* og massers *bevægelse* under påvirkning af kræfter.

Bevægelserne *beskrives* ved kinematikkens begreber og *forklares* ved dynamikkens.

1. KINEMATIK

1.1. Indledning

Placeringen af et punkt P i rummet kan beskrives ved hjælp af tre koordinater (x, y, z) i et rumligt koordinatsystem.



3-dimensionalt koordinatsystem

Hvis punktet bevæger sig, bliver dets koordinater til funktioner $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ af tiden t. Det er funktioner fuldstændigt som I arbejder med dem i matematik, men unægtelig med nye navne.

Det fordyber vi os nu lidt i og gør det samtidig lettere ved kun at betragte éndimensionale bevægelser.

1.2. Matematik og fysik, ligheder og forskelle

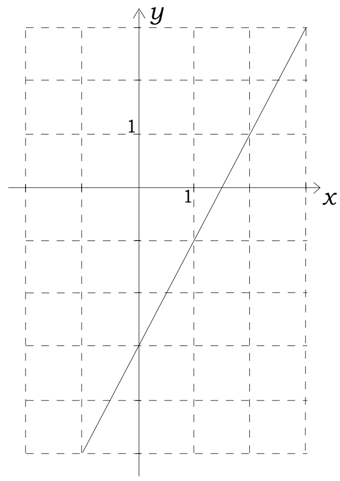
1.2.1. Matematik, eksempel.

Funktioner betegnes $f(x)$, f.eks.

$$f(x) = 2x - 3$$

x	$f(x)$
−1	−5
0	−3
1	−1
2	1
3	3

Illustrationen er altid grafisk:



1.3. Fysik

Funktioner skal i fysik kunne illustrere bevægelser.

En éndimensional bevægelse er en bevægelse på skinner så at sige. Bevægelsen kan være fremad og bagud, men ikke til siden eller op og ned. Det kan f.eks. være en vogn på vores luftpudebænk. Det kan også være en bevægelse langs en kurve, f.eks. et tog på jernbaneskinner, eller en bil på en vej (den skal bare holde sig på vejen).

En éndimensional bevægelser kan beskrives ved hjælp af én koordinat x på en x-akse med nulpunkt og orientering som sædvanligt. Eneste forskel er at vi kan finde på at bøje x-aksen.

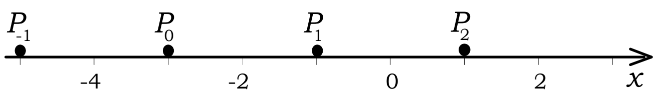
Punktet der bevæger sig, kaldes P_t. Ved hjælp af $_t$ som indeks angiver vi det tidspunkt vi har i tankerne. Når P_t bevæger sig på en x-akse, så bliver x en funktion af tiden t. I fysik skriver vi altså $x(t)$ i stedet for $f(x)$.

1.3.1. Fysik, eksempel

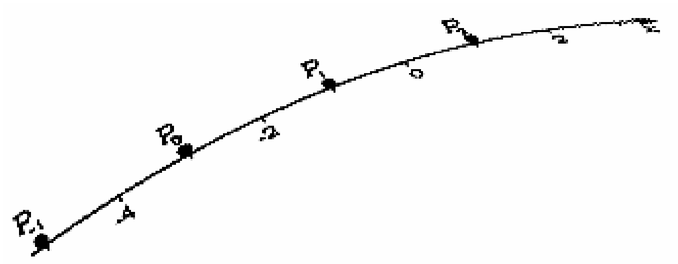
Vi ser på nøjagtig samme funktion som i matematikeksemplet 1.2.1.

$$x(t) = 2t - 3$$

Den direkte illustration for os er

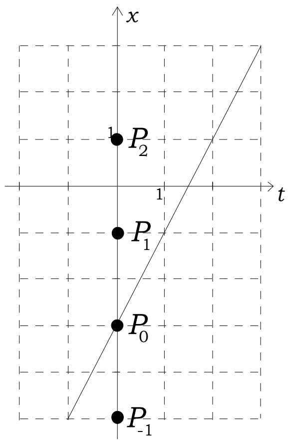


eller måske



hvor man ser punktet P placeret til tidspunkterne $t = -1$, 0, 1 og 2. Se for jer 4 billeder på en film taget på disse tidspunkter og lagt oven på hinanden som transparanter.

Hvis man vil illustrere bevægelsen med en graf, bliver det



hvor man altså skal bevæge fingeren langs 2.-aksen i takt med at tiden går som det ses på førsteaksen.

Og så vil I spørge: "Æhh, er det ikke fysik? Hvor blev enhederne af?" Og se så:

I

$$x(t) = 2\,t - 3$$

skal x angive et sted på x-aksen. Enheden må altså være en længdeenhed, lad os sige m. Så skal enheden være m på begge sider af lighedstegnet. 3-tallet må altså betyde 3 m.

t skal angive tiden og enheden må altså være en tidsenhed, lad os sige s.

Hvis første led på højre side skal blive til m, må 2-tallet have enheden $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. Den korrekte ligningen må altså blandt fysikere skrives

$$x(t) = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,t - 3\,\mathrm{m}$$

og akserne på grafen skal være $^{t}/_{\mathrm{s}}$ og $^{x}/_{\mathrm{m}}$.

Opg. 1-2

1.4. Hastighed

I eksempel 1.3.1 stødte vi på $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Det lugter da fælt af hastighed(?). Størrelsen $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ var hældningskoefficienten. I har fra matematik en formel hvoraf vi får

$$2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

(hvordan var det nu lige den så ud i matematikundervisningen?)

Her slås det på anden måde fast at hastighed er tilbagelagt strækning pr. tid.

I opgave 1 blev hele turen på 25,2 km kørt på 24 minutter; dvs. en gennemsnitshastighed på 63 km/h. (Regn efter!).

Vi må sige *gennemsnit*shastighed, for hvis vi regner på de dele af strækningen som kan aflæses i tabellen, får vi mange forskellige gennemsnitshastigheder. (Prøv selv!) Også her må vi sige gennemsnitshastighed, for enhver ved at hastigheden varierer meget ved almindelig bilkørsel.

Men hvad skal vi så forstå ved hastighed hvis det ikke må være gennemsnits-?

Vi kan til ethvert tidspunkt under kørslen kaste et (øje)blik på speedometret. Hvordan skal vi forestille os en definition af den øjeblikshastighed vi aflæser på den måde?

Det er slet ikke et simpelt spørgsmål at besvare. Faktisk kan det ikke besvares uden uendelighedsbegrebet.

Men så må vi jo kaste os over det også!

1.5. Middelhastighed

Middelhastighed er et andet ord for gennemsnitshastighed.

En *middelhastighed* v_m i et tidsrum $[t_1 ; t_2]$ beregnes ved den i tidsrummet tilbagelagte strækning divideret med tidsrummets størrelse, altså

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (1)$$

Bemærk, at v_m er fortegnsregnet. Det sidste svar i opgave 3 skal være negativt. Bemærk også, om/at dine intuitive svar i opgave 3 er i overensstemmelse med ovennævnte definition.

1.6. Øjeblikshastighed, indledning

Hvis man kører nok så ujævnt i en bil, kan man dog til ethvert tidspunkt t_0 kaste et blik på speedometeret og aflæse bilens *øjeblikshastighed* $v(t_0)$.

Denne hastighed er ikke en middelhastighed. Den vedrører kun dette ene tidspunkt t_0, og det må ingen rolle spille hvorledes bilen kører før eller efter t_0.

Definitionen tager udgangspunkt i middelhastigheden

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \qquad (2)$$

hvor t kan være såvel før som efter t_0.

Men ethvert tidsrum hvor $t - t_0 \neq 0$, er som nævnt utilfredsstillende. Helst ville vi sætte $t = t_0$, men så bliver nævneren jo nul.

Matematikkens grænseværdibegreb klarer situationen for os. Hvis brøken (2) har en grænseværdi for t gående mod t_0, så er denne grænseværdi den søgte $v(t_0)$.

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \to v(t_0) \text{ for } t \to t_0 \qquad (3)$$

Og så er det matematikeren kommer ind i billedet:

»Jamen«, siger hun så, »den brøk har en grænseværdi for t gående mod t_0, hvis $x(t)$ er differentiabel i t_0. Og grænseværdien er så det, vi kalder funktionens differentialkvotient i t_0. Den ved vi da en masse om.«

»Tak«, siger vi, - og benytter det:

1.7. Øjeblikshastighed, definition

Givet en bevægelse beskrevet ved koordinatfunktionen $x(t)$. Det antages at $x(t)$ er differentiabel overalt. Vi har så at øjeblikshastigheden $v(t)$ er givet ved

$$v(t) = x'(t) \qquad (4)$$

Hvis $x(t)$ er en kendt funktion, kan matematikkens differentiationsregler bruges. Hvis $x(t)$ er givet ved en graf, kan tangentmetoden bruges.

(Ved tangentmetoden bestemmes en funktions differentialkvotient $x'(t)$ som hældningskoefficienten til tangenten i punktet $(t, x(t))$.)

Vi glemmer naturligvis ikke enhederne for de fysiske størrelser som vi indsætter i (2). Ejheller glemmer vi dem når vi udregner hældningskoefficienter. Af både definitionen og af tangentmetoden fremgår derfor at SI-enheden for hastighed bliver $^m/_s$.

Opg. 4-8

1.8. Jævn bevægelse

En bevægelse med konstant hastighed kaldes en *jævn bevægelse*.

Når hastigheden $v = v_0$ er konstant, må $x(t)$ være en funktion som differentieret giver konstanten v_0. $x(t)$ er altså en lineær funktion,

$$x(t) = v_0\, t + x_0 \qquad (5)$$

hvor $x_0 = x(0)$ er *begyndelsesstedet*, nemlig positionen til $t = 0$.

Opg. 9

1.9. Acceleration

Var det sjovt at differentiere $x(t)$, så bliver der dog først rigtigt format over det når vi differentierer endnu engang. Derved fremkommer nemlig bevægelsens acceleration, og den indgår i Newtons 2. lov som er grundlaget for hele den klassiske fysiks mekanik.

For en endimensional bevægelse givet ved den to gange differentiable koordinatfunktion $x(t)$ defineres accelerationen $a(t)$ ved

$$a(t) = v'(t) = x''(t) \qquad (6)$$

Da der således gælder, at

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \to a(t_0) \text{ for } t \to t_0 \qquad (7)$$

ses at accelerationen $a(t_0)$ er et udtryk for hastighedstilvæksten pr. tid til tidspunktet t_0.

Ifølge (7) bliver enheden for a i SI-systemet $^{m}/_{s^2}$.

Endvidere ses at $a(t)$ kan findes ved brug af tangentmetoden på $v(t)$-grafen.

1.10. Vilkårlig bevægelse

Hvis bevægelsen er beskrevet ved en kendt matematisk funktion, bør v og a findes ved hjælp af matematikkens differentiationsregler.

Hvis bevægelsen er beskrevet ved dens $x(t)$-graf, kan tangentmetoden bruges til at finde $v(t)$- og $a(t)$-graferne.

Opg. 10-11

1.11. Konstant accelereret bevægelse

En bevægelse med konstant acceleration kaldes en *konstant accelereret bevægelse.*

Når accelerationen $a = a_0$ er konstant, må $v(t)$ være en lineær funktion, og $x(t)$ må være en funktion som differentieret giver denne lineære funktion. Vi finder

$$a = a_0$$

$$v(t) = a_0\, t + v_0$$

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\, a_0\, t^2 + v_0\, t + x_0$$

hvor $x_0 = x(0)$ er positionen til $t=0$ og $v_0 = v(0)$ er hastigheden til $t=0$.

En bevægelse med given konstant acceleration a_0 er altså først fastlagt når der er valgt både et begyndelsessted x_0, og en begyndelseshastighed v_0. x_0 og v_0 kaldes *begyndelsesbetingelserne.*

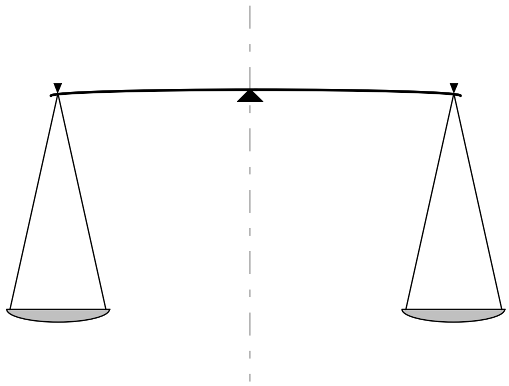
2. DYNAMIK

Foruden kinematikken behøves nu et *masse*- og et *kraftbegreb*.

2.1. Masse

Hvis to legemer kan afbalancere hinanden på en skålvægt siges de at have *samme masse*.

En toarmet skålvægt er i princippet opbygget således:



Der er fuldstændig symmetri omkring midterlinien.

Et legemes masse bestemmes ved afbalancering med *normallodder* fremstillet på basis af *normalkilogramloddet* i Sévre.

Et legeme har massen 1 kg hvis det afbalancerer normalkilogramloddet. Et legeme har massen 2 kg hvis det afbalancerer to legemer som hver har massen 1 kg. Et legeme har massen ½ kg hvis det sammen med et som det selv afbalancerer, kan afbalancere normalkilogramloddet. Osv.!

Der er især to erfaringer som gør masse til et fundamentalt begreb:

1° Når to legemer afbalancerer hinanden ét sted (dvs. har samme masse på dette sted), så afbalancerer de også hinanden alle andre steder i verden(srummet).

Et legemes masse *afhænger altså ikke af, hvor massebestemmelsen finder sted.*

2° *Massen af et legeme* (eller en hvilken som helst afgrænset del af verden) *kan ikke ændres af nogen påvirkning overhovedet.*

Af mulige påvirkninger kan man tænke på opvarmning, tryk, opskæring i mange dele, deformation eller f.eks. følgende kemiske proces:

På den ene vægtskål er der en syrebestandig beholder med lufttæt låg. I beholderen er der saltsyre. På samme vægtskål ligger der et stykke zink.

På den anden vægtskål er der et legeme, som netop afbalancerer dette.

Nu plumpes zinken ned i syren, og låget skrues på.

Der er stadig ligevægt på skålvægten. Og det vil der blive ved med at være. Også selv om beholderens indre har ændret sig til ukendelighed. Og hvis ikke der er ligevægt, er vi overbeviste om at der er feset noget ud, præcist det der mangler.

Vi bruger betegnelsen m for masse.

Enheden for masse er g (gram) og deraf afledede enheder.

2.2. Kraft

Når vi slipper et lod, falder det til jorden. Når vi hænger loddet op i en spiralfjeder, forlænges fjederen.

Begge disse skarpsindige iagttagelser forklarer vi ved at sige at jorden trækker i loddet med en kraft som vi også betegner *tyngdekraften* eller *gravitationskraften*.

Når to legemer afbalancerer hinanden på en skålvægt, må vi nødvendigvis regne tyngdekræfterne på dem ens.

Hvis vi vil have et simpelt kraftbegreb, må vi regne kraften på to lodder med samme masse for dobbelt så stor som kraften på hvert af lodderne. Det betyder at vi regner tyngdekræfter på legemer for proportionale med legemernes masser, altså

$$F_{\mathrm{g}} = g\,m \qquad (8)$$

hvor F_{g} står for gravitationskraften og g er proportionalitetskonstanten.

Projektet er nu at vælge en værdi for konstanten g. Det er faktisk det samme som at vælge enhed for kraftmåling. Derefter vil vi være i stand til at angive størrelser på tyngdekræfter. Og så gælder det bare om at sammenligne alle andre kræfter med tyngdekræfter, så er kraftbegrebet færdigt. Imidlertid rummer bestemmelsen af g en fælde som vi skal undgå at falde i.

Dertil behøver vi en spiralfjeder, et lod, et målebånd og en bevilgende myndighed.

Vi hænger loddet op i fjederen og rejser jorden rundt med fjeder, lod og målebånd og måler forlængelsen overalt.

Og hvad vil så denne dejlige ekskursion mon vise os?

Til måske nogen forbløffelse vil det vise sig at loddet strækker fjederen stadig mere når vi rejser fra ækvator mod polerne.

(Det er ikke noget en almindelig rejsende opdager. Det drejer sig blot om godt ½ %. Så målingen skal gribes mere omhyggeligt an end den foregående rejseskildring antyder.)

Fænomenet skyldes at jordens træk i det samme lod, altså tyngdekraften, varierer med den geografiske position. Den geografiske forudsætning er derfor vigtig i følgende definition af kraftenheden *kilopond* kp.

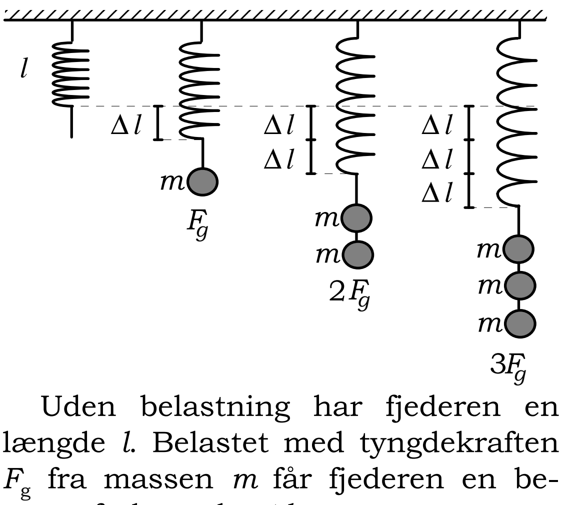
> 1 kp er tyngdekraften på
> 1 kg på *normalstedet* i Paris.

Hermed er g i (8) fastlagt til

$$g = \frac{F_g}{m} = \frac{1\text{kp}}{1\text{kg}} = 1\ \text{kp/kg} \qquad (9)$$

i Paris!

For at kunne måle tyngdekraften på 1 kg andre steder på jorden, må man kunne konstruere en kraftmåler som kan måle kræfter uafhængigt af tyngdekraften på lodder (som jo varierer). En sådan kraftmåler, et *dynamometer*, kan konstrueres ved hjælp af en spiralfjeder.



Uden belastning har fjederen en længde l. Belastet med tyngdekraften F_g fra massen m får fjederen en bestemt forlængelse Δl.

Med belastningen fra $2m$ er fjederen ifølge (8) påvirket af dobbelt så stor en kraft $2F_g$. Omhyggelig iagttagelse vil til vor store glæde vise at fjederens forlængelse er dobbelt så stor.

Med belastningen $3\,F_g$ er forlængelsen $3\,\Delta l$, osv.

Dette må tages som en erfaring - som imidlertid gør det let at lave et dynamometer.

For at få dynamometret konstrueret korrekt, må vi igen til Paris. (Er det for at låne normalkilogramloddet, eller for at være på normalstedet, eller begge dele, -eller er vi bare ude på sjov?)

I Paris tager vi en spiralfjeder forsynet med en anordning som skal blive dynamometrets skala.

På skalaen sætter vi en streg, nulpunktet, som svarer til den ubelastede fjeders længde.

Dernæst belaster vi spiralfjederen med tyngdekraften fra 1 kg og slår en streg på skalaen som markerer kraften 1 kp.

Da fjederforlængelsen er proportional med kraften, kan skalaen færdiggøres uden yderligere belastninger af fjederen.

Så er dynamometret færdigt.

Hjemkommet til Danmark måler vi spændt tyngdekraften på 1 kg og finder 1,001 kp. Der gælder altså for g i (8), at

$$g = \frac{F_g}{m} = \frac{1{,}001\text{kp}}{1\text{kg}}$$

$$= 1{,}001\,\frac{\text{kp}}{\text{kg}} \qquad (10)$$

i Danmark!

Således kan man på ethvert sted på jorden indrette sig, så man kan måle tyngdekræfter i enheden kp.

Herefter kan vi afslutte denne indledende indførelse af kræfter ved følgende vedtægt:

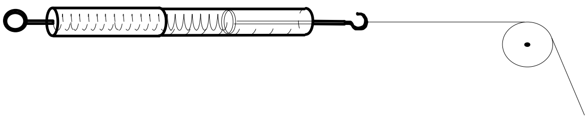
> Andre kræfter end tyngdekræfter er alt hvad der kan ophæve virkningen af tyngdekræfter.
>
> To kræfter der ophæver hinanden, regnes for lige store og modsatrettede.

Kræfter har såvel en størrelse (måltal og enhed) som en retning. Matematikkens vektorbegreb beskriver kræfters egenskaber fuldstændigt.

Kræfter er vektorer.

Kræfter med samme størrelse, men med forskellige retninger, har meget forskellige virkninger.

Kræfters retning kan ændres ved hjælp af en snor over en trisse

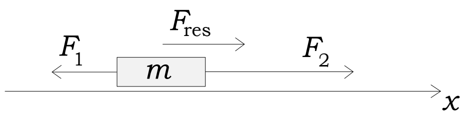


hvorved størrelsen bevares.

Vi skal blot behandle kræfter som er enten ensrettede eller modsatrettede. Vektoregenskaberne betyder så blot at to ensrettede kræfter virker som deres sum i samme retning, mens to modsatrettede kræfter virker som deres differens i samme retning som den største af kræfterne.

2.3. Newtons 2. lov

Vi tænker os nu at det er et legeme med massen m og ikke blot et punkt som bevæger sig på x-aksen.



Legemet bevæger sig under påvirkning af en eller flere kræfter (her F_1 og F_2) som antages at være parallelle med x-aksen. De må gerne variere med tiden.

Kræfterne regnes med fortegn i overensstemmelse med x-aksens orientering. En positiv kraft påvirker legemet i aksens positive retning. (F_1 er negativ og F_2 er positiv på figuren.)

Den resulterende kraft F_{res} på legemet findes ved vektoraddition af alle på legemet virkende kræfter. I endimensionale tilfælde betyder vektoraddition blot at kræfterne lægges sammen med fortegn. Bemærk at størrelsen af F_{res} er forskellen mellem F_1 og F_2 og peger i samme retning som den største, F_2.

Virkningen på legemets bevægelse af F_1 og F_2 er nu den samme som hvis *kun* F_{res} var til stede. Altså *enten* F_1 og F_2 *eller* F_{res}.

Vi kan herefter formulere Newtons 2. lov:

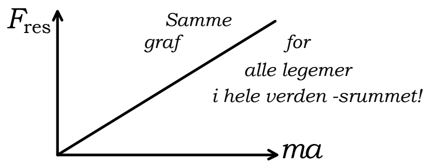
Legemet bevæger sig således at der hele tiden gælder at

$$F_{res} \text{ er proportional med } m\,a$$

hvor a er legemets acceleration.

Der er tale om en lov som kan efterprøves, d.v.s. forsøg kan afgøre om den er rigtig eller forkert. Og det kan forsøg fordi vi på forhånd har alle tre begreber, kraft, masse og acceleration veldefineret til rådighed.

Eksperimenter (- og I skal nok få lov!) vil så vise at forsøg med varierende kræfter på forskellige masser altid vil give proportionale værdier af F_{res} og $m\ a$. (Afbildet i et koordinatsystem med F_{res} på den ene akse og $m\,a$ på den anden vil alle forsøgsresultater falde på en og samme rette linie gennem (0,0)).



Vi kunne herefter skrive $kF = m\,a$, hvor k er en konstant som kan bestemmes ved vores forsøg. Det skal I gøre. Resultatet giver mening.

Men vi gør også noget andet:

Når vi har indset at Newtons 2. lov gælder, vil F_{res} og $m\,a$ altid være proportionale og altså måle samme fysiske størrelse, nemlig en kraft.

Det giver basis for en ny kraftenhed idet en kraft kan måles ved den værdi af $m\ a$ som den giver et vilkårligt legeme når kun den påvirker legemet (når den er den resulterende kraft).

Dermed kan Newtons 2. lov skrives

$$\boxed{F_{res} = m\,a} \qquad (11)$$

hvor kraften måles ved $m\,a$ i enheden N (newton) givet ved

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot(\mathrm{m}/\mathrm{s}^2) = \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Denne måde at måle kræfter på er sjældent velegnet i praksis. Men principielt giver den en simplere udgave af Newtons 2. lov (11), som vi skal hilse velkommen.

2.4. Sammenhængen mellem N og kP

Sammenhængen mellem N og kP kan findes ved at betragte et legeme med massen m i frit fald. På legemet virker tyngdekraften givet ved (8)

$$F_g = g\,m$$

At det falder frit, betyder at der kun virker denne éne kraft på det. Altså gælder

$$F_{res} = F_g$$

Ifølge Newtons 2. lov (11) gælder yderligere

$$F_{res} = m\,a$$

hvoraf vi slutter at

$$a = g$$

Da g er en konstant, ses heraf at alle frie legemer accelereres ens i deres fald mod jorden (Galileis faldlov). Det er især den uundgåelige gnidningsmodstand i luften der har gjort at denne faldlov ikke just springer i øjnene.

Yderligere lærte vi at med vores nye kraftebegreb (11) må proportionalitetskonstanten g i (8) sættes lig med legemers frie acceleration på det pågældende sted. g kaldes derfor *stedets tyngdeacceleration*.

Gode målinger af tyngdeaccelerationer kan foretages med pendulforsøg. For Danmark gælder at $g = 9{,}82\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$.

Normalt skrives (8) med konstanten bagerst

$$\boxed{F_g = m\,g} \qquad (12)$$

med

$$g = 9{,}82\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2} = 9{,}82\ ^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{kg}}$$

i Danmark.

På normalstedet i Paris finder man

$$g = 9{,}80665\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$$

Idet man ihukommer definitionen af enheden kp (se indholdsfortegnelse) fås så at

$$1\mathrm{kp} = 1\mathrm{kg} \cdot 9{,}80665\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$$
$$= 9{,}80665\ \mathrm{N}$$

Opg. 12

2.5. Bevægelse under konstant kraft

Vi betragter et legeme med massen m som bevæger sig på en retliniet x-akse. Det antages at den resulterende kraft F_{res} er konstant. Den er parallel med x-aksen, ellers ville bevægelsesbanen krumme.

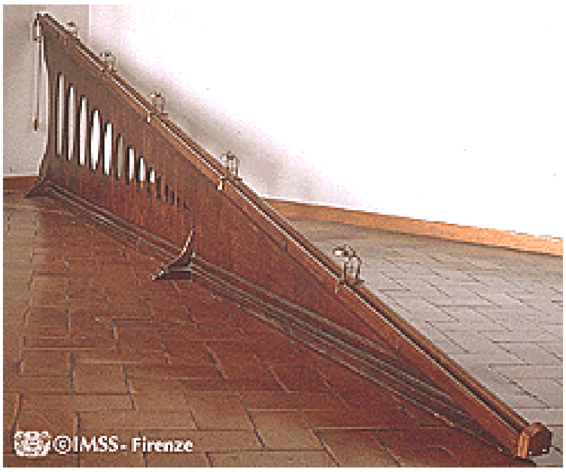
Ved hjælp af Newtons 2. lov (11) findes accelerationen

$$a = F_{res}/m$$

Da denne er konstant, udfører legemet en konstant accelereret bevægelse som beskrevet i afsnit 1.11.

$$a_0 = F_{res}/m$$
$$v(t) = a_0\,t + v_0$$
$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,a_0\,t^2 + v_0\,t + x_0$$

hvor x_0 og v_0 er begyndelsesbetingelserne.



Specielt gælder disse formler for det frie fald langs en lodret linie hvor så

$$a_0 = \pm\, g$$

ifølge afsnit 2.4. Fortegnet afhænger af om aksen er orienteret nedad eller opad.

Opg. 13-16

3. PRINCIPIA, 1687

3.1. Indledning

Kapiteltitlen er også titlen (-populærudgaven af. Den originale titel er *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) på det værk hvormed *Isac Newton* (1642 - 1727) i 1687 stadfæstede overgangen mellem middelalderens og den moderne tids natursyn.

Efter videnskabshistorikeren Thomas S. Kuhn kaldes en sådan overgang et *paradigmeskifte*. Noget sådant kommer ikke ud af den blå luft, men forberedes ved at det gældende paradigme udsættes for en række udfordringer som det ikke kan holde stangen.

Aristoteles' (384 - 322, f.v.t.) verdensbillede blev i 1200-tallet forenet med kirkens lære til det middelalderlige verdensbillede med jorden (-og mennesket, i egen selvforståelse kronen på Guds skaberværk) i centrum. Verden og mennesket var i kirkens vold.

De omvæltende udfordringer kom især fra astronomien hvor den opfattelse at solen var centrum med jorden som bare en af 7 planeter kredsende omkring, vandt frem. Navne i denne proces var især Copernicus (1473-1543),

Tycho Brahe (1546 - 1601), Kepler (1571 - 1630) og Galilei (1564 - 1642).

På den filosofiske front nævner man Descartes (1596 - 1650). Og så endelig: *Newton.*

Herefter var verden i videnskabens vold. Den ydre verden fungerede efter universelle love som et perfekt urværk. Alle astronomiske begivenheder (og - formodede man - også alle jordiske) kunne forudberegnes med vilkårlig nøjagtighed. Den menneskelige bevidsthed stod udenfor og iagttog reglerne ved hjælp af hvilke det var enhver forundt at kunne forstå verden fuldstændigt. Oplysningstiden, frigørelsesbevægelser, politiske revolutioner, den industrielle revolution, råstofjagten, imperialismen, den økonomiske liberalisme, spirende demokratiideer m.m. fulgte. Og - paradoksalt nok – tanken om en generel determinisme (MSN, s.283).

Når jeg indledningsvist kaldte denne periodes natursyn for det moderne, så er det fordi verden stadig ser sådan ud i vores hoveder skønt der i fysikken siden er sket endnu et paradigmeskift med kvantemekanikken.

Det har imidlertid endnu ikke haft nær den samme gennemslagskraft i den generelle bevidsthed. Om det skyldes at det simpelthen er af mindre rækkevidde, eller at essensen er så fremmedartet at rækkevidden ikke er fordøjet af toneangivende tænkere, kan vi filosofere over når vi kommer til atomfysikken og kvantemekanikken.

Vi vil her behandle de love som Newton publicerede i Principia.

Så kort kan de skrives

$$\boxed{\begin{aligned} &1. \quad F_{\text{res}} = 0 \Leftrightarrow v \text{ er konstant} \\ &2. \quad F_{\text{res}} = ma \\ &3. \quad F_{12} = -F_{21} \\ &4. \quad F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \end{aligned}} \qquad (13)$$

men de kan næppe stå uden kommentarer. Newton bruger 626 sider (i den engelske oversættelse. Originalen var naturligvis på latin). Vi nøjes med mindre.

3.2. Første lov

kaldes også *inertiens lov*. Banalt tolket kunne det se ud, som om den følger af 2. lov. Så Newtons mening må have været en anden!

Første lov gælder ikke i alle koordinatsystemer (eller ståsteder). Det opdager man hurtigt hvis man forsøger at spille billard i en togvogn. Vi kan antage at billardbordet hele tiden er vandret så at tyngdekraften på billardboldene hele tiden ophæves af lige så store og modsatrettede kræfter fra bordet. Den resulterende kraft er derfor 0. Alligevel vil billardboldene ændre hastighed hvis toget bremser eller kører ind i en kurve.

Et koordinatsystem, hvori 1. lov gælder kaldes et *inertialsystem*.

Hvis altså en partikel som ikke er påvirket af kræfter, ses at bevæge sig med konstant hastighed, så betragtes den fra et *inertialsystem*, se forsiden.

At der faktisk findes inertialsystemer er en erfaringssag som må behandles nærmere i klassen.

Første lov er en afgørende forudsætning for 2. lov som middel til udpegning af inertialsystemer.

3.3. Anden lov

er mekanikkens grundlov. Den siger:

Når en partikel med masse m bevæger sig under påvirkning af den resulterende kraft F_{res} , og beskrivelsen foretages i et inertialsystem, så gælder

$$F_{\text{res}} = ma$$

Newton udtrykte selv 2. lov ved hjælp af begrebet *bevægelsesmængde*. Det er meget vigtigt i den klassiske mekanik og endnu vigtigere i kvantemekanikken, så vi skrider straks til en definition.

En partikel med masse m og hastighed v har bevægelsesmængden p givet ved

$$p = mv \tag{14}$$

Dermed kan anden lov omskrives

$$F_{\text{res}} = ma = mv' = (mv)' = p'$$

(- næstsidste omskrivning udnytter at m er konstant).

Under en partikels bevægelse gælder altså, at den resulterende kraft er den tidsafledede af bevægelsesmængden, og bevægelsesmængden er en stamfunktion til den resulterende kraft.

Ved at indføre differenskvotienten i stedet for differentialkvotienten bliver det til

$$F_{\text{res}} = (mv)' = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}$$

eller

(På frimærket henvises også til Newtons farveteori.)

3.4. Tredje lov

kaldes *loven om aktion og reaktion.*

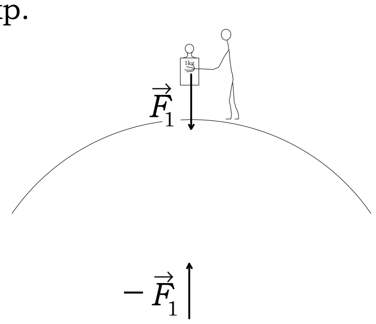
Den siger at når to legemer 1 og 2 påvirker hinanden med kræfter, så vil kraften F_{12} på 1 fra 2 og kraften F_{21} på 2 fra 1 være lige store og modsatrettede (d.v.s. med modsat fortegn på en x-akse).

Begreberne aktion og reaktion kan altid ombyttes. Det er derfor mere passende at sige at Newtons tredje lov påstår at alle kræfter opstår som par af lige store og modsatrettede kræfter som udgår fra forskellige legemer. De kan gensidigt kaldes årsag til hinanden.

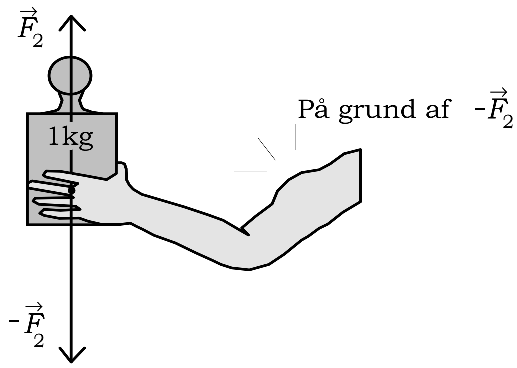
Loven bliver på næste side illustreret med to helt forskellige eksempler.

3.4.1. Eksempel.

Jeg står med et 1 kg-lod i hånden. På det virker en tyngdekraft $\vec{F}_1$ på 1 kp. Den skyldes jordens tilstedeværelse. Makkeren $-\vec{F}_1$ til tyngdekraften på loddet hiver altså opad i jorden med 1 kp.



Man kunne tro at makkeren til tyngdekraften på loddet er den kraft $\vec{F}_2$ hvormed jeg bærer loddet. Den er jo også 1 kp og opadrettet (hvorfor loddet er i ro).



Men dens makker $-\vec{F}_2$ hiver nedad i min hånd. De er gensidigt årsag til hinanden. Hvis jeg nemlig slipper, forsvinder $\vec{F}_2$ og $-\vec{F}_2$ samtidigt, mens tyngdekraften på loddet består lige såvel som kraften opad i jorden.

Kraften opad i jorden, hva' er nu det for noget pjat? Hvordan kan den måles?

Det kan den hvis man tager et ordentligt lod, Månen f.eks. Månen holdes i sin bane af tyngdekraften fra jorden. Altså påvirker Månen jorden med en lige så stor og modsatrettet kraft. Og *den* gør sig gældende! Den betyder nemlig at Jorden slingrer i sin bane hvilket bl.a. bevirker at vi har tidevand.

3.4.2. Eksempel.

Ved et *isoleret system* forstås et system som ikke er påvirket af kræfter udefra, *ydre kræfter*, eller for hvilket de udefra kommende kræfter ophæver hinanden.

Vi betragter et isoleret system bestående af to legemer som bevæger sig på en x-akse. Man kan tænke på to vogne på en luftpudebænk.

De to legemer kan påvirke hinanden indbyrdes med såkaldte *indre kræfter*. Der kan altså være tale om kraften F_{12} på 1 fra 2 og F_{21} på 2 fra 1. Og der er ingen ydre kræfter.

Disse kræfter er hinandens makkere og adlyder altså 3. lov. F_{12} og F_{21} er samtidig de resulterende kræfter på de to legemer, så 2. lov kan bruges. Med p_1 og p_2 betegner vi bevægelsesmængderne for de to legemer. De bevæger sig altså således at følgende udsagn er sande hele tiden

$$
\begin{aligned}
& F_{12} && = -F_{21} \\
\Leftrightarrow\quad & F_{12} + F_{21} && = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & p_1' + p_2' && = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (p_1 + p_2)' && = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & p_1 + p_2 && \text{er konstant}
\end{aligned}
$$

$p_1 + p_2$ kaldes *systemets samlede bevægelsesmængde*.

Under forudsætning af 2. lov er 3. lov altså ensbetydende med følgende vigtige bevarelsessætning her i generaliseret udgave:

> For et isoleret system er den totale bevægelsesmængde bevaret.

De tre første love er de generelle bevægelseslove som gælder for alle kræfter.

Foruden disse publicerede Newton en fjerde lov kaldet *gravitationsloven*. Den beskriver gravitationskræfter eller tyngdekræfter kvantitativt.

3.5. Gravitationsloven

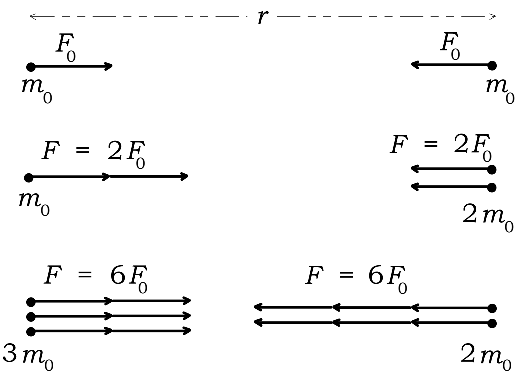
påstår at to punktformige masser m_1 og m_2 tiltrækker hinanden med kræfter givet ved

$$F = G\frac{m_1\,m_2}{r^2}$$

hvor r er afstanden mellem dem og G er en universel konstant.

F betyder størrelsen af kraften på såvel m_1 som m_2. Kraften på den ene partikel er rettet mod den anden.

Hvis der overhovedet virker kræfter mellem masser, så kan tælleren godt forstås ud fra følgende overvejelser.



Øverst ses to "prøvelegemer" med masser m_0 i afstand r som påvirker hinanden med kræfterne F_0.

I midten er der tilføjet et prøvelegeme til højre. Prøvelegemet til venstre mærker hvert af de to prøvelegemer til højre og er påvirket $2\,F_0$. Hvert af de to prøvelegemer til højre mærker det til venstre som før, hvorfor massen $2\,m_0$ til højre er påvirket af kraften $2\,F_0$.

Nederst ses to legemer med masserne $3\,m_0$ og $2\,m_0$ sammensat af henholdsvis 3 og 2 prøvelegemer. Ved samme argumenter som før ses at kraften på hvert er $6\,F_0$. Kraften er altså proportional med produktet af de to masser når afstanden holdes konstant.

At kraften aftager med kvadratet på afstanden, må eksperimenter afgøre. (Det var for Newtons vedkommende mest målinger foretaget af Tycho Brahe og sat i system af Kepler, samt observationer af månen).

Opg. 17, 18

Gravitationsloven er et gigantisk spring fra de tidligere tiders kvalitative og specielle fænomenbetragtninger til en kvantitativ, universel lov som udtrykkes på moderne vis, kort, matematisk, men dækkende et vældigt område af bevægelser, herunder knyttende de himmelske og de jordiske bevægelsesfænomener sammen under samme lovmæssighed. (Den samme lov får æblet til at falde fra træet og holder månen på plads i sin bevægelse!).

Men gravitationsloven, hvor naturlig den end kan forekomme os, indeholdt en ren absurditet for samtiden, Newton inklusive! nemlig den såkaldte fjernvirkning, en kraft mellem legemer uden nogen materiel forbindelse mellem dem.

Og hvilken kraft !

Opgave 17 skulle gerne vise at kraften mellem Solen og Jorden er $3{,}5\cdot 10^{22}$ N.

En karakteristisk brudstyrke for stålwire er $1{,}7\,\mathrm{kN/mm^2}$. Hvis kraften skulle leveres af en sådan wire, måtte dens diameter være 5000 km.

Uddrag af breve *fra Newton himself* til Richard Bentley, 1692-93 i min oversættelse:

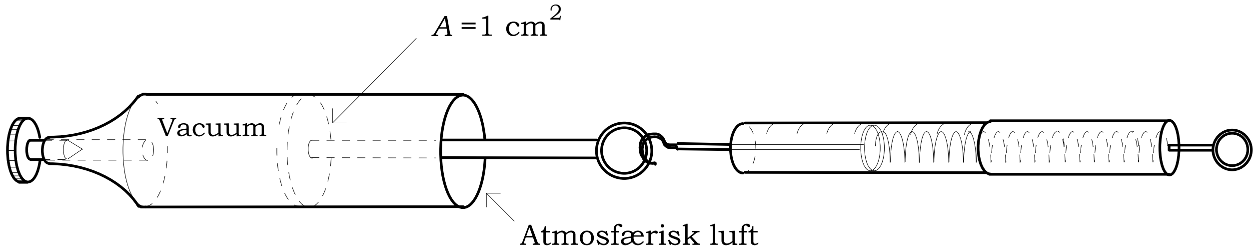
"At et legeme kan virke på et et andet på afstand gennem vacuum uden at betjene sig af noget som helst gennem hvilket deres virkning og kraft kan formidles fra det ene til det andet, er for mig så absurd en tanke at jeg tror intet menneske som har anlæg for at tænke fornuftigt kan tilslutte sig den."

Værgo!

Der *er* også lidt absurd for os, ikke?

- og det var så den svageste af naturkræfterne!

4. TRYK



I en sprøjte som tegnet ovenfor er det muligt at have et lufttomt rum, et vakuum, bag stemplet.

Dynamometret viser det samme (ca. 10 N hvis tværsnitsarealet er 1 cm^2) uanset hvor meget stemplet trækkes ud. Og uanset hvordan opstillingen drejes rundt.

Da stemplet er i hvile, må dynamometrets kraft på stemplet opvejes af en lige så stor og modsatrettet kraft fra luften på stemplet. Denne er altså rettet vinkelret på stemplets overflade.

Erstattes sprøjten med en med dobbelt så stort areal, vil dynamometret vise det dobbelte.

Der gælder altså at på en plan overflade med areal A vil kraften F fra luften være proportional med A.

Der findes altså en konstant p som ganget med A giver F.

$$F = pA \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{F}{A} \qquad (15)$$

p er konstant i den forstand at den ikke afhænger af A

p karakteriserer kraftpåvirkningen på flader fra luften netop den dag og på dette sted. En anden dag eller et andet sted kan p være en anden.

Dykker vi 10 m ned i Sønderborg Bugt og laver samme forsøg, skal der trækkes med ca. den dobbelte kraft (dvs. ca. 20 N og ca. 40 N på de omtalte stempler). Men igen er forholdet F/A det samme for de to stempler (nemlig dobbelt så stort som på land).

Enheden for tryk i det internationale enhedssystem er N/m^2 som også kaldes pascal Pa.

Se andre trykenheder i databogen.

Luftens tryk, også kaldet *barometerstanden B*, varierer (jf. begreberne høj- og lavtryk) omkring et gennemsnit på 1013 hPa ved havets overflade.

Luftens tryk varierer markant med højden. Det kan konstateres med et almindeligt barometer blot ved at bevæge sig fra kælderen til loftet. En beskrivelse af denne variation er emnet for næste afsnit.

4.1. Massefylde

Et stofs *massefylde* ϱ er forholdet mellem massen m af en del af stoffet og det tilhørende volumen V, altså

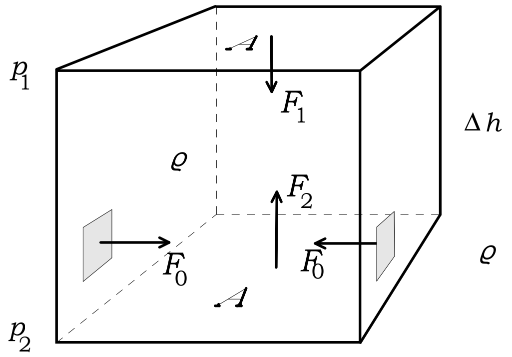
$$\varrho = \frac{m}{V} \qquad (16)$$

Det er afgørende for definitionen at m og V er proportionale. Det er i høj grad tilfældet for væsker og faste stoffer. For gasser gælder det ikke hvis de betragtede mængder breder sig over for store højdeforskelle.

For faste stoffer og væsker afhænger massefylden lidt af temperaturen og overordentligt lidt af trykket.

For gasser afhænger massefylden i væsentlig grad både af temperatur og tryk. For gasser må man derfor sammen med en oplysning om massefylden angive ved hvilken temperatur og ved hvilket tryk den gælder, jf. databogen s. 119 og 122. Normalmassefylden er massefylden ved 0 °C og 1 atm.

4.2. Trykkets afhængighed af højden



På den viste kasse har de to vandrette flader arealet A og kassens højde er Δh.

Kassen tænkes anbragt i en væske med massefylden ϱ. Trykket i væsken ved kassens top kaldes p_1 og ved kassens bund p_2 .

Der gælder $p_2 > p_1$ og vi sætter

$$\Delta p = p_2 - p_1$$

Δp er altså tryk*stigningen*, når vi bevæger os stykket Δh *nedad* i væsken.

Vi kan nu finde sammenhængen mellem Δp og Δh ved at betragte kræfterne på kassen fra den omgivende væske.

Kræfterne på de fire lodrette sider ophæver hinanden to og to. Hver lille del af en lodret side har nemlig lige over for sig en tilsvarende lille del med samme areal og samme tryk. Kræfterne (f.eks. F_0) er derfor lige store og modsat rettede.

Kræfterne F_1 og F_2 på de to vandrette flader ophæver ikke hinanden fordi trykkene p_1 og p_2 er forskellige. For de to kræfters størrelse gælder

$$F_1 = p_1 A \quad \text{og} \quad F_2 = p_2 A$$

så at den samlede kraft fra væsken på kassen har størrelsen

$$F_v = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)A = \Delta p A$$

F_v er rettet lodret opad, og kaldes *opdriften*. Opdriften skyldes kraften fra væsken på kassens overflade og er naturligvis uafhængig af, hvad kassen består af.

Opdriften kan derfor findes ved følgende snedige argument:

Kassen tænkes erstattet af væske af samme art som den der omgiver kassen.

Erstatningsvæsken vil naturligvis kunne forblive i ro hvilket betyder at samtlige kræfter på erstatningsvæsken ophæver hinanden.

Foruden den opadrettede F_v virker den nedadrettede tyngdekraft F_g, så der altså gælder $F_v = F_g$.

F_v er opdriften uanset hvad der er i kassen, mens F_g er tyngden af erstatningsvæsken.

Dermed kan *Arkimedes' lov* indses:

> Opdriften på et i væske nedsænket legeme er lig med tyngdekraften på den fortrængte væske.

Endvidere kan vi udlede en vigtig formel:

Massen af erstatningsvæsken er ifølge (16)

$$m = \varrho V = \varrho A \Delta h$$

hvorfor tyngdekraften ifølge (12) er

$$F_g = \varrho A \Delta h g$$

$F_v = F_g$ giver derfor

$$\Delta p A = \varrho A \Delta h g$$

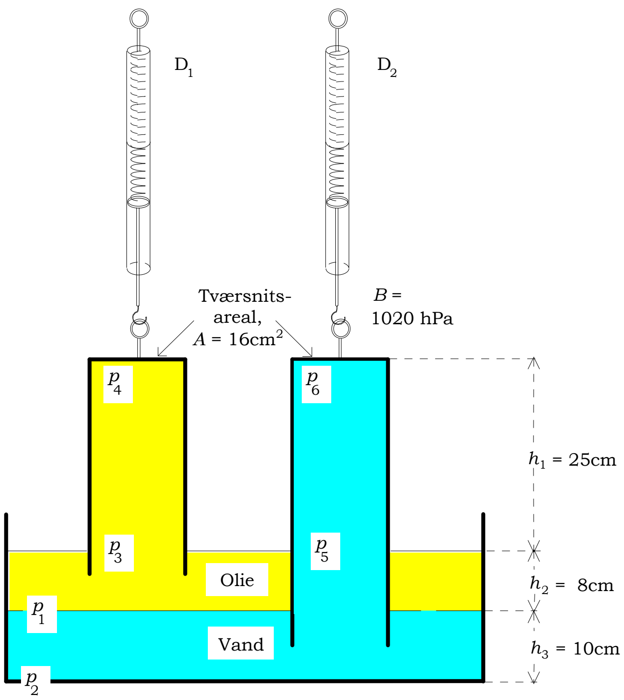
som fører til resultatet

$$\Delta p = g \varrho \Delta h \qquad (17)$$

Ræsonnementet forudsætter at ϱ er konstant.

Formlen (17) gælder derfor kun for gasser, når trykket og temperaturen inden for højdeforskellen Δh ikke varierer for meget.

4.2.1. Eksempel.



De to cylinderglas hænger i to dynamometre D_1 og D_2. Det venstre cylinderglas er fyldt med olie, det højre er fyldt med vand.

Opstillingens data fremgår af figuren.

Massefylderne for hhv. vand og olie er

$$\varrho_v = 1\text{ g cm}^{-3} \text{ og } \varrho_o = 0{,}8\text{ g cm}^{-3}$$

Find trykkene p_1, p_2, ... , p_6 !

Svar: Der er meget store gevinster forbundet med at behandle de fysiske størrelser repræsenteret ved deres bogstavsymboler fremfor ved måltal og enheder. Se selv:

Ved at betragte figuren ses at

$$\begin{aligned}
p_1 &= B + g\,\varrho_o\,h_2 \\
p_2 &= p_1 + g\,\varrho_v\,h_3 \\
&= B + g\,(\varrho_o h_2 + \varrho_v\,h_3) \\
p_3 &= B \\
p_4 &= B - g\,\varrho_o h_1 \\
p_5 &= p_1 - g\,\varrho_v\,h_2 \\
&= B + g\,(\varrho_o h_2 - \varrho_v\,h_2) \\
p_6 &= p_5 - g\,\varrho_v\,h_1 \\
&= B + g\,(\varrho_o h_2 - \varrho_v\,h_2 - \varrho_v\,h_1) \\
&= B + g\,(\varrho_o\,h_2 - \varrho_v\,(h_1 + h_2))
\end{aligned}$$

På dette sted tolker man samtlige formler. F.eks. er p_2 barometerstanden plus trykstigning som følge af nedstigning på h_2 i olie og h_3 i vand. (Prøv endelig også p_6 !)

Så kommer de numeriske problemer:

$$\begin{aligned}
B &= 1020\text{ mbar} \\
&= 1020\cdot 10^{-3}\cdot 10^5\text{Pa} \\
&= 1020\cdot 10^2\text{ Pa} = 102\,000\text{ Pa}
\end{aligned}$$

Når vi indsætter tallene med de givne enheder i led af formen $g\varrho h$, får disse led enheden

$$\frac{\text{N}}{\text{kg}}\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\text{ cm} = \frac{\text{N}}{1000\text{ cm}^2}$$

$$= \frac{10\text{ N}}{10^4\text{ cm}^2} = \frac{10\text{ N}}{(10^2\text{cm})^2} = 10\text{ Pa}$$

Ved hjælp af regnemaskinen fås herefter let

$$\begin{aligned}
p_1 &= 102\,628\text{ Pa} \\
p_2 &= 103\,610\text{ Pa} \\
p_3 &= 102\,000\text{ Pa} \\
p_4 &= 100\,036\text{ Pa} \\
p_5 &= 101\,843\text{ Pa} \\
p_6 &= 99\,388\text{ Pa}
\end{aligned}$$

4.2.2. Eksempel.

Om cylinderglassene på figuren til eksempel 4.2.1 oplyses at det til venstre vejer 28 g og det til højre vejer 30 g samt at de er meget tyndvæggede.

Hvad viser de to dynamometre?

Svar: Når cylinderglassene er tyndvæggede kan vi se bort fra opdriften på dem.

Da de er i ro, er den resulterende kraft på hver af dem 0.

Vi indfører betegnelserne

$$m_1 = 28\text{ g} \quad \text{og} \quad m_2 = 30\text{ g}$$

På cylinderglasset til venstre virker følgende kræfter:

Nedad:	Tyngden på glasset:	$m_1 g$
	Kraften fra luften:	$B\,A$
Opad:	Kraften fra D_1:	F_1
	Kraften fra olien:	$p_4\,A$

Da glasset er i ro, gælder

$$m_1 g + BA = F_1 + p_4 A$$
$$\Leftrightarrow \quad F_1 = m_1 g + (B - p_4) A$$
$$\Leftrightarrow \quad F_1 = m_1 g + g \varrho_o h_1 A$$
$$\Leftrightarrow \quad F_1 = (m_1 + \varrho_o h_1 A) g$$

Idet $\varrho_o h_1 A$ er massen af den hævede olie, skal dynamometret altså bære såvel cylinderglasset som den hævede olie, selv om man kan hævde at olien bliver trykket op nedefra.

Ved at indsætte talværdier fås

$$F_1 = 0{,}00982\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{g}} \cdot (28\,\mathrm{g} + 0{,}8\,{}^{\mathrm{g}}/_{\mathrm{cm}^3} \cdot 25\,\mathrm{cm} \cdot 16\,\mathrm{cm}^2) = 3{,}42\,\mathrm{N}$$

På cylinderglasset til højre virker følgende kræfter:

Nedad:	Tyngden på glasset:	$m_2 g$
	Kraften fra luften:	BA
Opad:	Kraften fra D_2:	F_2
	Kraften fra vandet:	$p_6 A$

hvoraf

$$m_2 g + BA = F_2 + p_6 A$$
$$\Leftrightarrow \quad F_2 = m_2 g + (B - p_6) A$$
$$\Leftrightarrow \quad F_2 = m_2 g - g(\rho_o h_2 - \varrho_v (h_1 + h_2)) A$$
$$\Leftrightarrow \quad F_2 = g(m_2 + \varrho_v (h_1 + h_2) A - \varrho_o h_2 A)$$

$\varrho_v (h_1 + h_2) A$ er massen af det hævede vand, mens $\varrho_o h_2 A$ er massen af den fortrængte olie.

Vi kan altså heraf slutte at D_2 skal bære cylinderglasset og det hævede vand minus opdriften på den fortrængte olie.

Indsættes tallene fås

$$F_2 = 0{,}00982\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{g}} \cdot (30\,\mathrm{g} + 1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 33\,\mathrm{cm} \cdot 16\,\mathrm{cm}^2 - 0{,}8\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 8\,\mathrm{cm} \cdot 16\,\mathrm{cm}^2) = 4{,}47\mathrm{N}$$

4.3. Morale

Den fortolkning der her er gjort af de enkelte led, er helt udelukket hvis man på et tidligt tidspunkt sætter de kendte tal ind.

Selv om der ikke i en opgave bliver bedt om en sådan fortolkning, er det klogt at gøre den. Det giver en vældig tryghed med hensyn til at opgaven er rigtigt løst, og man bliver så klog af det. Og så *er* det meget nemmere!

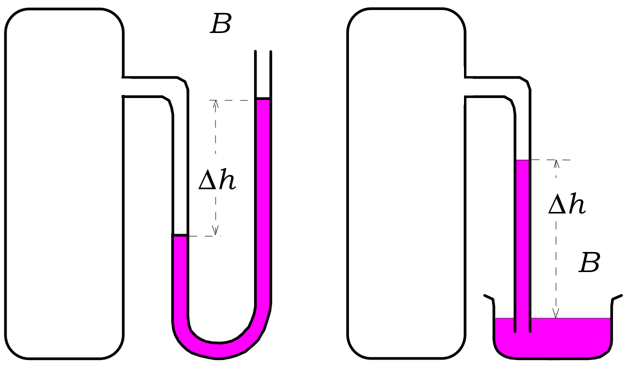
Opg. 19

4.4. Søjlehøjde kviksølv som trykenhed

Dette afsnit har ikke blot historisk interesse. Man støder stadig på enhederne mmHg og cmHg - og måske stadig på trykmålere som inderholder kviksølv. Men princippet bruges stadig meget i forbindlse med trykmålinger; med særligt lette væsker når følsomheden skal være stor. Altså:

Kviksølv (Hg) er ved stuetemperatur en væske med stor massefylde (ϱ_{Hg} = 13,55 g/cm^3). Endvidere er almindeligt forekommende gasser og væsker praktisk talt uopløselige i kviksølv. Kviksølv er derfor meget velegnet til at måle tryk med.

Det anbringes da i (som regel) lodrette glasrør, som f.eks.



Mellem de to kviksølvoverflader er der ifølge (17) en trykforskel på

$$\Delta p \;=\; g\,\varrho_{Hg}\Delta h \qquad (18)$$

I den venstre beholder er trykket Δp større og i den højre beholder Δp mindre end barometerstanden B.

Da Δp beregnet ved (18) og Δh er proportionale kan trykforskellen lige så godt måles ved Δh. Man skriver så

$$\Delta p \;=\; \Delta h \text{ Hg} \qquad (19)$$

Hvis f.eks. $\Delta h = 1$ cm = 10 mm fås

$$\Delta p \;=\; 1\,\text{cmHg} \;=\; 10\,\text{mmHg}$$

4.4.1. Eksempel.

Vi kan omregne 1 cmHg til Pa ved hjælp af (18)

$$\Delta p \;=\; 9{,}82\frac{\text{N}}{\text{kg}}\cdot 13{,}55\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\cdot 1\,\text{cm}$$

$$=\; 9{,}82\cdot 13{,}55\frac{\text{N g cm}}{1000\text{g cm}^3} \;=\; 1331\text{ Pa}$$

Man kan naturligvis bruge andre væsker end Hg. Trykmåleren i et centralvarmeanlæg måler som regel i meter vandsøjle (mVs).

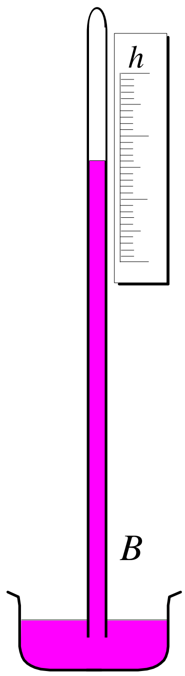
Med en luftpumpe kan man fjerne al gas fra en beholder. Gør man det ved beholderen til højre, og trykket falder til 0 i beholderen, så vil der gælde at

$$\Delta p = B - 0 = B \quad \text{og} \quad \Delta h = h$$

idet h så skal regnes fra den frie kviksølvoverflade. Dermed kan (19) omskrives

$$B \;=\; h\text{Hg}$$

Opstillingen kaldes et kviksølvbarometer og kan udformes således



Ved havets overflade varierer h med en gennemsnitsværdi på 760 mm.

Det vil sige, at barometerstanden ved havets overflade varierer omkring 760 mmHg, som også kaldes 1 atm (atmosfære). Altså

$$1\,\text{atm} \;=\; 760\,\text{mmHg}$$

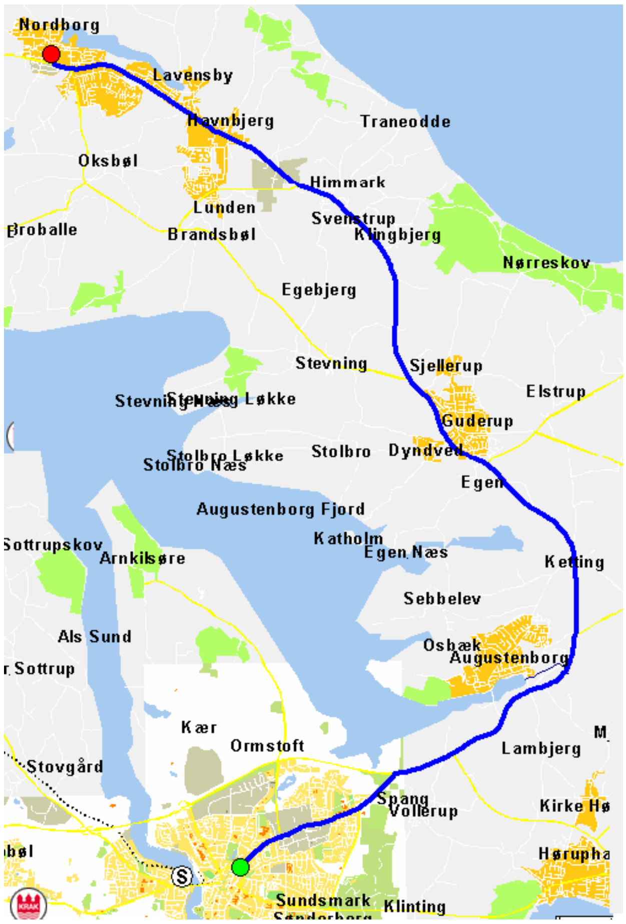
Opg. 20-24

5. OPGAVER

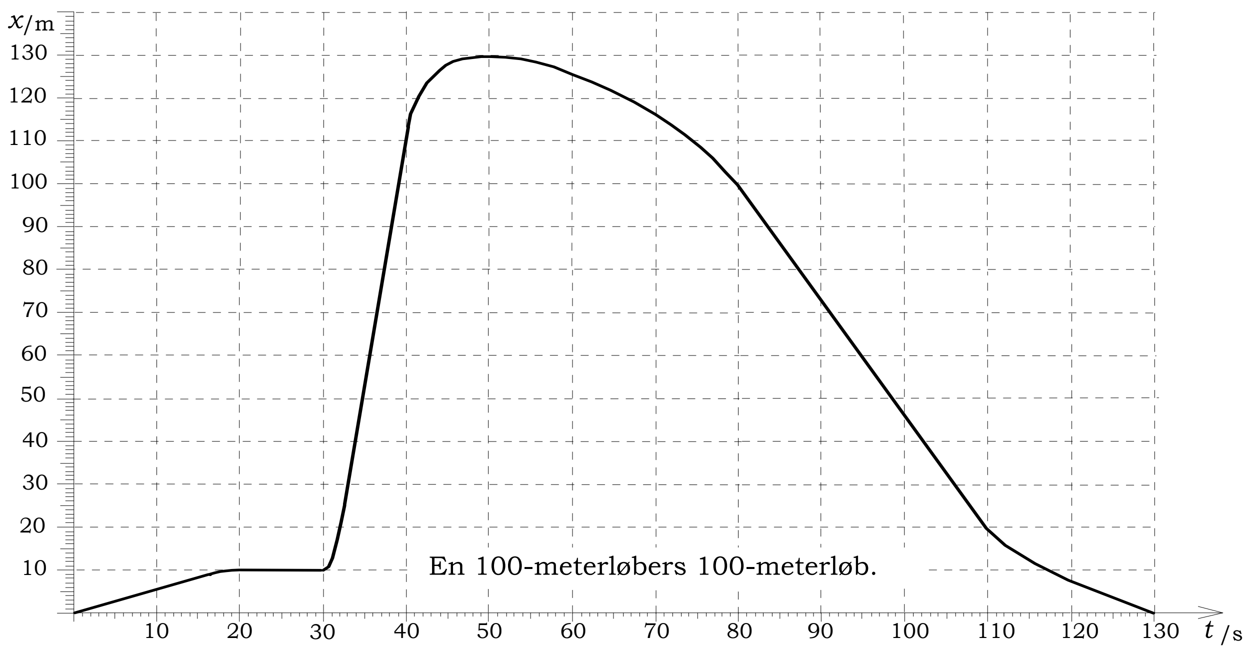
Opgave 1

(Fra http://www.krak.dk)

Fra:	Alsgade 1, 6400 Sønderborg		
Til:	Stationsvej 100,6430 Nordborg		
	Beskrivelse:	**Trip**	**Tid**
	Følg **Alsgade** ca. 1 km	1 km	1 min
	Fortsæt ligeud ad **Augustenborg Landevej** ca. 5 km	6 km	6 min
	Fortsæt ligeud ad **Landevejen** ca. 2,3 km	8,3 km	8 min
	Drej til højre ad **Rundkørsel** ca. 60 m	8,4 km	8 min
	Drej til højre ad **Landevejen** ca. 2,7 km	11,1 km	10 min
	Fortsæt ligeud ad **Nordborgvej** ca. 12,8 km	23,9 km	22 min
	Fortsæt ligeud ad **Ringvej** ca. 1000 m	24,9 km	23 min
	Drej til højre ad **Stationsvej** ca. 300 m	25,2 km	24 min
Rute-slut	Afstanden er i alt **25,2 km** og rejsetiden er ca. **24 min** i bil		



Placer $P_{6\text{min}}$, $P_{8\text{min}}$ og $P_{23\text{min}}$ på kortet og tegn en *xt*-graf for køreturen.



Opgave 2

Tidtagningen starter, idet løberen træder ind på stadion.

a) Hvor længe står løberen stille på startlinien?

b) Hvornår går starten?

c) Hvor lang tid tager selve løbet?

d) Hvor langt kommer løberen væk fra startlinien før han vender om?

e) Hvor længe er løberen inde på stadion?

(Det forudsættes (urealistisk), at han går tilbage ad nøjagtig samme rute, som han kom ind.)

Opgave 3

a) Med hvilken middelhastighed gennemføres 100 m-løbet?
b) Hvad er middelhastigheden i de 10 s hvor løberen løber farten af inden han vender om?
c) Hvad er den største og den mindste hastighed inden for disse 10 s?
d) - og gennemsnittet af de to?
e) Hvad er middelhastigheden for hele tilbageturen?

Opgave 4

Find ved hjælp af tangentmetoden for 100 m-løbet hastigheden til tidspunkterne $t = 10$ s, 25 s, 35 s, 45 s, 60 s, 95 s og 130 s. (Husk enheder!)

Opgave 5

Find positionen til 0, 2 og 4 s af punktet, som bevæger sig i overensstemmelse med

$$x(t) = (3\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}})\cdot t - 10\,\mathrm{m}$$

Find hastigheden af punktet til samme tidspunkter. (Tænk over, hvad der er konstant, og hvad der er variabelt!)

Opgave 7

Find $v(t)$ for den bevægelse, der er givet ved

$x(t) = 10\,\mathrm{cm}\cdot(1 - e^{-(0{,}1/\mathrm{s})\cdot t})$

Tegn grafer for $x(t)$ og $v(t)$ på mm-papir.

Opgave 8

Tegn sammen med grafen i opgave 1 xt-grafen for en bil som kører med konstant hastighed fra Alsgade 1 til Stationsvej 100 og som starter og ankommer samtidig med bilen i opgave 1.

Hvad er den konstante hastighed for denne bil. Sammenlign med bilen i opgave 1.

Opgave 9

Tegn for 100m-løbet grafen for den jævne bevægelse som i tidsrummet [40 s; 50 s] tilbagelægger samme strækning som løberen. Hvad er dens hastighed?

(Sammenlign med løberens middelhastighed i samme tidsrum (Opg. 3 b)).

Opgave 10

Skitser grafen for $v(t)$ og $a(t)$ for 100 m-løberen.

Brug tangentmetoden to gange. Først på $x(t)$-grafen for at finde $v(t)$ dernæst på $v(t)$-grafen for at finde $a(t)$.

Opgave 11

Find og tegn også $a(t)$-grafen for bevægelsen i opgave 7.

Opgave 12

Er kraften 1 kp den samme overalt på jorden?

Er massen 1 kg den samme overalt på jorden?

Er tyngdekraften på 1 kg den samme overalt?

I databogen findes en formel til beregning af g for enhver geografisk position.

Find g for Sønderborg, for Skagen og for Paris.

Eftervis påstanden om ½%'s variation (s.5) fra polerne til ækvator.

Eftervis påstanden (10).

Opgave 13

Opskriv formlerne i kap.2.5 for det tilfælde hvor bevægelsen starter i hvile i origo.

Brug disse formler i de næste to opgaver.

Opgave 14

Hvor lang tid varer et frit fald på 100 m startende fra hvile?

Med hvilken hastighed ender det?

Opgave 15

Regn på ny øvelse 13 fra energinoterne.

Læs teksten under øvelsen i energinoterne og besvar spørgsmålet om, hvor længe faldet varer.

Opgave 16

En sten kastes lodret opad med en hastighed på $10\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ fra et vindue 8 m over jorden.

Vælg en x-akse og opstil $x(t)$ og $v(t)$ for bevægelsen.

Hvornår er stenen højst oppe, og hvor højt er den da?

Hvornår rammer stenen jorden, og med hvilken hastighed sker det?

Opgave 17

Find de nødvendige størrelser i databogen og udregn størrelsen af den kraft hvormed Solen holder fast i Jorden.

Opgave 18

Jules Verne (1828 – 1905) viser i sin science fiction-roman *Rejsen til månen*, 1865, en meget stor videnskabelig og teknisk indsigt.

Selv om han givetvis er parat til at yde romanens hovedpersoner – en håndfuld artillerifanatikere som i frustration over fredsslutningen efter den amerikanske borgerkrig har kastet deres drømme om mere eventyr, hæder og ære inden for deres fag på et måneprojekt – al kvalificeret hjælp, må han ind imellem lade dem trodse det muliges grænser.

Bogen giver anledning til et endeløst antal både simple og komplicerede fysiske problemstillinger hvis løsning snart viser fuldstændig realisme og snart hviler på vildt, men altid meget humoristisk fantasteri.

Vi nøjes med følgende klassiker:

For at slippe bort fra jordens tyngdefelt må et projektil affyret fra jordoverfladen have en hastighed på $11\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$. Kl. 22.46.49 den 1. december, 186- (årstallet bliver aldrig oplyst) fyres "Columbiaden", et tre meter i diameter og 10 tusind kilo tungt, hult projektil indeholdende præsident (for kanonklubben) Barbicane, kaptajn Nicholl og Michel Ardan, af i en 300 m lang kanon.

Og hvordan har de det mon med det?

Accelerationen begrænses bedst ved at gøre den konstant.

Hvad er den konstante acceleration, der fører frem til det ønskede resultat?

Hvor lang tid tager affyringen?

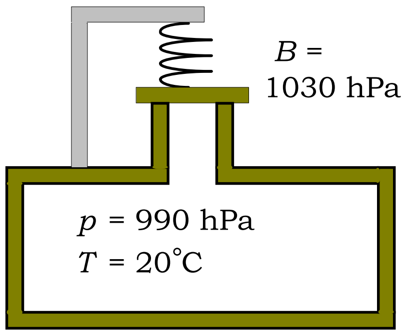
Hvad er den resulterende kraft på en person som vejer 90 kg?

Hvad er den resulterende kraft på Columbiaden?

Hvornår indtræffer vægtløsheden for de tre?

(På dette punkt dummer Jules Verne sig helt overflødigt og uforståeligt. Det sker i II Del, KAPITEL 8, *Tre hundrede tolv tusind fire hundrede seksoghalvtreds kilometer fra Jorden.* Måske kan du gøre det bedre?)

Opgave 19



I beholderen er der atmosfærisk luft i overensstemmelse med tegningen.

Hvad er trykket ved 100°C når sikkerhedsventilen ikke åbner ved denne temperatur?

Sikkerhedsventilen er et låg der presses mod et rør med en indre diameter på 2 cm af en fjeder med kraften 28,5 N.

Ved hvilken temperatur åbner sikkerhedsventilen?

Beholderen holdes på 400°C et stykke tid, hvorefter den afkøles til 20 °C.

Hvad er trykket nu i beholderen?

Opgave 20 (Knald i låget)

En sort beholder forsynes med en prop ved en barometerstand på 103 kPa og ved 20°C .

Proppen som har et areal på 20 cm^2, sidder netop så hårdt fast at der skal en kraft på 57 N for at frigøre den.

En dag hvor barometerstanden er 98 kPa, anbringes beholderen i solen, og efter et stykke tid ryger proppen af.

Hvor høj blev temperaturen?

(Find først trykket, idet proppen ryger.)

Opgave 21

Find trykkene på land og på 10 meters dybde ud fra de ovenfor nævnte tal.

Hvad bliver trykkene i hPa (hektopascal) som er den enhed, meteorologerne bruger?

Find kraften på hver af de fire lodrette sider af en 1 liters mælkekarton fra luften uden for kartonen en dag hvor trykket er 1000 hPa.

Opgave 22

Vi måler barometerstanden B_{-1} i kælderen og B_4 på 4. sal og vurderer Δh.

B_{-1} = B_4 =

Δh =

Heraf kan vi finde

$$\varrho = \frac{\Delta p}{g\,\Delta h} =$$

Sammenlign med databogen.

Opgave 23

Find den kraft hvormed man skal bære et 1kg kobberlod når det er nedsænket i vand.

(Jf.. databogen)

Hvor dybt synker kobberloddet i kviksølv?

(Spørgsmålet er ikke helt præcist formuleret. Du må selv præcisere det.)

Opgave 24

Udtryk mVs i Pa.
Udtryk cmHg i cmVs.

Opgave 25

Hvis der er 10 m fra kedlen op til ekspansionsbeholderen, hvor stort er så trykket i kedlen?

Opgave 26

Udtryk atm i Pa.

6. STIKORDSREGISTER