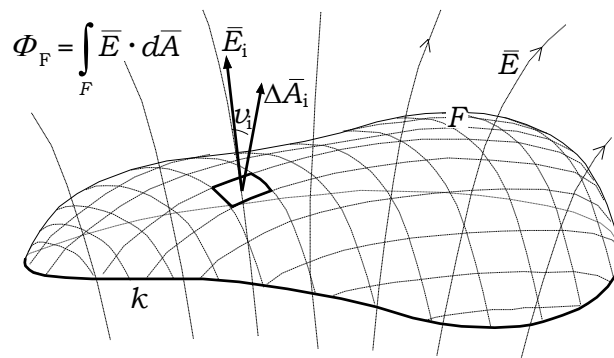
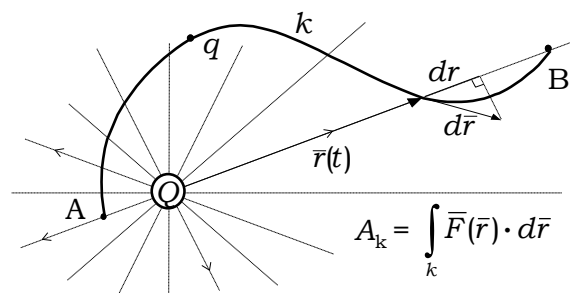


Felter



Fladeintegraler



Kurveintegraler

SelvTryk

1. Elektriske felter	1
1.1. Elektrisk ladning	1
1.1.1. Enheder	1
1.2. Coulombkraften	1
1.3. \vec{E} -felt	2
1.4. Centralfelt	3
1.5. Dipolfelt	3
1.6. Feltlinier og -tæthed	4
1.7. Fluksen gennem en flade	5
1.7.1. Eksempel, centralfelt	5
1.8. Gauss's teorem	5
1.9. Fluks og flukstæthed	6
1.10. Ladninger i ledere	7
1.11. Tegning af feltlinier	7
1.12. Van der Graf-generatoren m.m.	8
1.13. Kontinuerte, homogene ladningsfordelinger.	9
2. Energi og arbejde i elektriske felter	10
2.1. Kurveintegral	10
2.1.1. Eksempel, centralfelt	10
2.2. Konservative kraftfelter	11
2.3. Potentiale	12
2.3.1. Eksempel, centralfelt	12
2.4. Spænding	12
2.5. Ækvipotentialflader	12
2.5.1. Eksempel, centralfelt	12
2.5.2. Enheder	13
2.6. Gravitationsanalogier	13
3. Kapacitoren	14
3.1.1. Enheder	14
3.2. Energi i kapacitoren	15
3.3. Parallel- og serieforbindelse af kapacitorer	15
3.4. Op- og afladning af kapacitoren	16
3.5. Ladet partikels bevægelse i homogent elektrisk felt	17

4. Magnetfelter	18
4.1. Indledning	18
4.2. Magnetfeltets retning	18
4.3. Ørsteds forsøg	19
4.3.1. Enheden 1 A	20
4.4. Laplaces lov	20
4.5. Lorentzkraften	21
4.6. Ladet partikels bevægelse i homogent magnetfelt.	21
4.7. Hastighedsfilter	22
4.7.1. Enheder	22
4.8. Biot og Savarts lov	23
4.9. Gauss's teorem for magnetfelter	23
4.10. Magnetfeltet omkring en lang, lige leder	24
4.11. Bestemmelse af μ_0	24
4.12. Magnetfeltet fra spoler	25
5. Induktion	27
6. Opgaver	30
7. Stikordsregister	31

1. ELEKTRISKE FELTER

1.1. Elektrisk ladning

Den elektriske kraft hører til blandt de fundamentale kræfter. Den er fundamental i den forstand at vi ikke kan forklare den yderligere, men blot beskrive den. De ord vi bruger til beskrivelsen udspringer af systematikken i vores iagttagelser.

Elektriske kræfter kan både være tiltrækkende og frastødende. Vi kan tage et vilkårligt legeme som er påvirket af elektriske kræfter og kalde det *positivt*. Så kan vi tage alle legemer som ved elektriske kræfter frastødes af dette og kalde dem *positive* og alle legemer som tiltrækkes af dette og kalde dem *negative*. Så vil vi iagttagelse at alle de positive legemer frastøder hinanden, og alle de negative frastøder hinanden, mens alle med modsat ladning tiltrækker hinanden.

Desværre tog de gamle grækere det forkerte stof da de sagde: »positiv!«. De kunne jo ikke vide at ladbingsbærerne derved blev negative. Nu er vi ofte fristet til den parentetiske tilføjeelse: »Strømmen går fra plus til minus! (I virkeligheden er det elektronerne der løber den anden vej.)«

Det er også muligt at tildele legemer *ladningsstørrelser* så at ladning bliver en additiv (fortegnsregnet) egenskab, og så at entydige kvantitative formler for kraftens størrelse kan opstilles.

I modsætning til et legemes masse er et legemes ladning kvantiseret. Den mindste frit eksisterende ladning er *elementarladningen* e . Elektronens ladning er $-e$. Protonens ladning er e .

Et brintatom eksisterer i kraft af den elektriske tiltrækning mellem disse to partikler. Atomets ladning bliver således nul så at et brintatom er elektrisk neutralt udadtil.

Større legemers ladning er en følge af ubalance mellem antallet af elektroner og protoner i legemet. Et legemes ladning q kan således skrives som

$$q = (n_p - n_e)e \quad (1)$$

hvor n_p og n_e er antallet af henholdsvis protoner og elektroner.

1.1.1. Enheder

Enheden A for *strøm* er en grundenhed hvis definition vi vender tilbage til i afsnit 4.3.1.

Ligeledes er enheden s for *tid* en grundenhed.

Der gælder

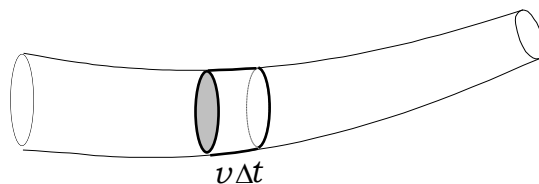
$$I = \frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

hvor ΔQ er den *ladning* der ved strømmen I passerer et tværsnit af ledningen i løbet af tiden Δt .

Enheden C (coulomb) for ladning er en afledet enhed defineret ved

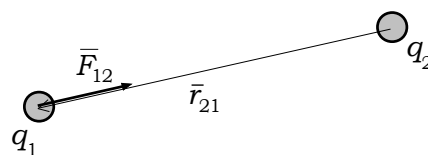
$$C = A s$$

Der strømmer altså i løbet af 1 s en ladning på 1 C igennem et tværsnit af en ledning hvori strømmen er 1 A.



Den ladning der i løbet af tiden Δt er passeret igennem det tonede tværsnit, vil så befinde sig i det fremhævede volumen hvor v er ladbingsbærernes hastighed.

1.2. Coulombkraften



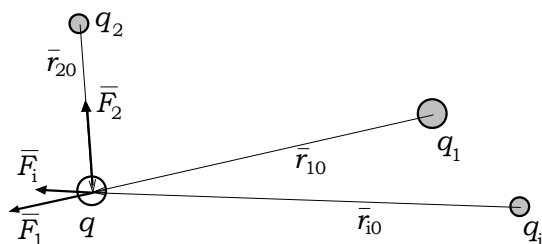
Kraften mellem to ladninger q_1 og q_2 kaldes *coulombkraften* og kan skrives

$$\vec{F}_{12} = k_c \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \quad (2)$$

hvor \vec{F}_{12} er kraften på q_1 fra q_2 og \vec{r}_{21} er vektoren fra q_2 til q_1 .

At der i tælleren skal stå $q_1 q_2$ er en følge af at ladninger og kræfter er additive og kan indses som vi gjorde det i forbindelse med $m_1 m_2$ i Newtons gravitationslov.

1.3. \vec{E} -felt



Kraften \vec{F} på en ladning q fra alle andre ladninger q_1, q_2, \dots, q_N i hele verden kan så skrives

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N k_c \frac{q q_i}{r_{i0}^2} \frac{\vec{r}_{i0}}{r_{i0}} \\ &= k_c \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i0}^2} \frac{\vec{r}_{i0}}{r_{i0}} q = \vec{E} q\end{aligned}\quad (3)$$

hvor \vec{r}_{i0} peger fra q_i til q , $i=1, 2, \dots, N$, og hvor den *elektriske feltstyrke* eller *feltvektor* eller \vec{E} -feltet

$$\vec{E} = k_c \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i0}^2} \frac{\vec{r}_{i0}}{r_{i0}} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad (4)$$

afhænger af alle andre ladingers placering, men ikke af q .

Feltet er en vektorfunktion $\vec{E}(P, t)$ af sted og tid (verden forandrer sig!). Afhængigheden af tiden vil vi ofte tage som en selvfølgelighed uden at nævne det.

Endeligt er det tilføjet at \vec{E} jo kan opfattes som sum af bidrag \vec{E}_i fra de enkelte ladninger.

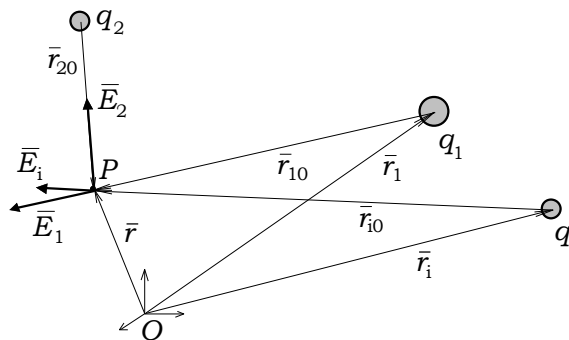
Vi har her opskrevet \vec{E} med vektorer \vec{r}_{i0} fra q_i til q , $i=1, 2, \dots, N$.

Hvis vi i stedet ønsker $\vec{E}(\vec{r})$ beregnet ud fra et koordinatsystem (se næste figur), skal \vec{r}_{i0} udtrykkes ved stedvektorer

$$\vec{r}_{i0} = \vec{r} - \vec{r}_i, \quad i=1, 2, \dots, N$$

hvor \vec{r}_i er stedvektor til q_i og \vec{r} er stedvektor til punktet P hvor ladningen q er anbragt, $\vec{OP} = \vec{r}$.

Man kan også lade være! -med at anbringe ladningen q i punktet P og alligevel beregne $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(P)$.



Faktisk er feltbegrebet særligt værdifuldt fordi feltet kan beregnes ud fra en given ladningsfordeling, q_i , $i=1, 2, \dots, N$ uden at anbringe en ladning i punktet P . Feltet får dermed en allestedsnærværende karakter (virkelighed?) ligesom gravitationsfeltet.

Hvis man så i punktet P anbringer en ladning q , finder man ifølge (3) kraften på q ved at tage $\vec{E}(\vec{r})$ og gange med q .

$$\vec{F}(q, \vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) q \quad (3')$$

(-ligesom med gravitationsfeltet!)

Ved ladninger forstår vi i denne fremstilling oftest *punktladninger*. Kontinuert udtværede *ladningsfordelinger* må behandles som integraler over udtværingen hvor det differentielle bidrag så er en punktladning.

Enkelte eksempler på kontinuerte ladningsfordelinger vil blive behandlet, (1.13).

Af (3') fremgår det at SI-enheden for E er N/C.

Vi skal på næste side se på et par specialtilfælde af (4).

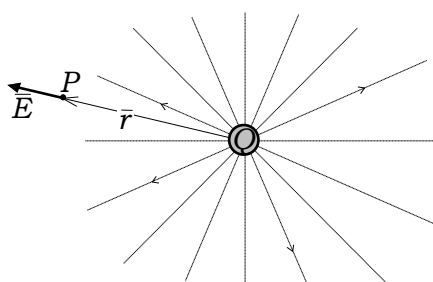
1.4. Centralfelt

Feltet omkring en punktladning Q når man ser bort fra andre ladninger, kaldes et *centralfelt*.

Centralfeltet er altså (4) med kun et led, $q_1 = Q$. Hvis vi lader stedvektorer udgå fra Q ($\vec{r}_1 = \vec{0}$) er feltet givet ved

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = k_c \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5)$$

Centralfeltet kan anskueliggøres ved *feltlinier* som stråler radiært ud fra (-når Q er positiv ellers ind mod) ladningen Q .

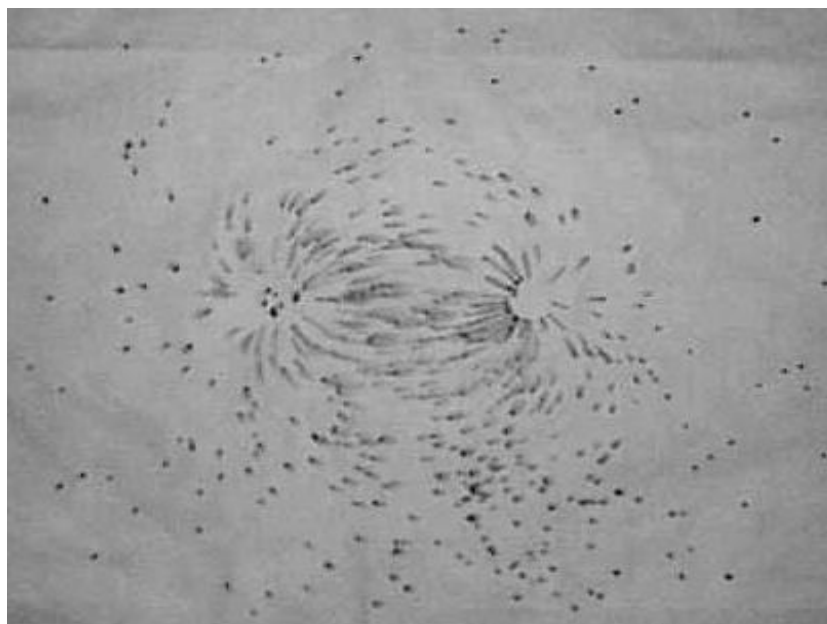


I alle tilfælde er feltlinier *orienterede kurver* som har \vec{E} som *positiv halvtangent*. Her bliver det særligt simpelt.

I alle tilfælde kan feltlinier tegnes så de *begynder på positive og ender på negative ladninger* (eller i det uendelige) og således at feltstyrken er proportional med *feltlinietæthed*. Ved Coulombfeltet bliver det særligt simpelt:

Hvis det antal feltlinier som udgår fra q fortsætter, så vil feltlinietætheden (antal

linier pr. areal) aftage som r^{-2} idet en kugles overflade vokser som r^2 . Også feltstyrken skal aftage som r^{-2} i følge (5).



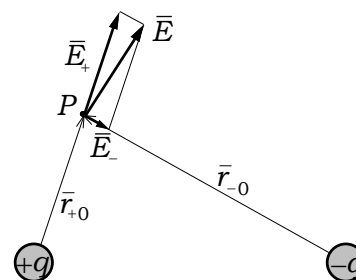
1.5. Dipolfelt

Et *dipolfelt* er feltet omkring to numerisk lige store ladninger med modsat fortegn. (Strengt taget er det feltet når afstanden mellem dem går mod nul eller man er langt væk fra dem i forhold til afstanden mellem dem.)

Dipolfeltet er altså (4) med to led.

Med $q_1 = q$ og $q_2 = -q$ og lidt yderligere tilpassede betegnelser er feltet givet ved

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$



På figuren ses sådanne to ladninger og en enkelt konstruktion af $\vec{E}(P)$.

Størrelsesforholdene er som sædvanligt korrekte!

I opgave 2 skal I konstruere $\vec{E}(P)$ i 6 punkter. Man kan prøve at tegne ubrudte feltlinier fra + til - i overensstemmelse med de i venstre spalte givne betingelser.

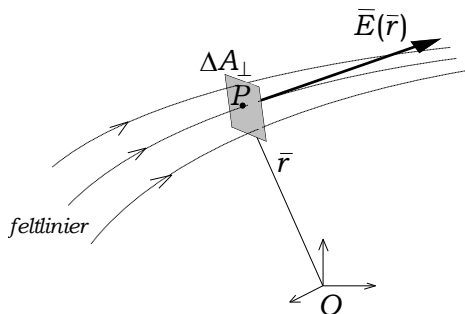
Det samme kan forsøges på billedet nedenfor af vores kaliumpermanganatforsøg.

Men beviset for at feltlinierne altid

kan tegnes med de dér givne egenskaber afventes naturligvis med spænding.

1.6. Feltlinier og -tæthed

Som forberedelse til det med spænding imødesete bevis skal vi præcisere begrebet feltlinier og feltlinietæthed.



En *feltlinie* er en orienteret kurve.

Forholdet mellem antallet af feltlinierne og E er et valg ligesom når man vælger enheder på akserne når man skal tegne en graf.

Tegning af feltlinierne er en anskuelliggørelse af vektorfeltet $\vec{E}(\vec{r})$. En vektor har retning og størrelse, og der skal gælde

Retningen af $\vec{E}(\vec{r})$ er positiv halvtangent til feltlinien gennem P .

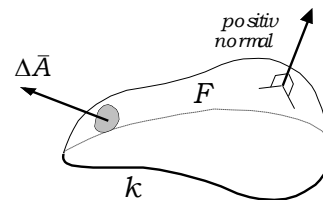
Størrelsen af $\vec{E}(\vec{r})$ er proportional med feltlinietætheden i P .

Ved *feltlinietætheden* i punktet P forstås antallet ΔN af feltlinier pr. areal ΔA_{\perp} hvor ΔA_{\perp} er et lille areal omkring P vinkelret på feltlinierne.

$$E(\vec{r}) \propto \frac{\Delta N}{\Delta A_{\perp}}$$

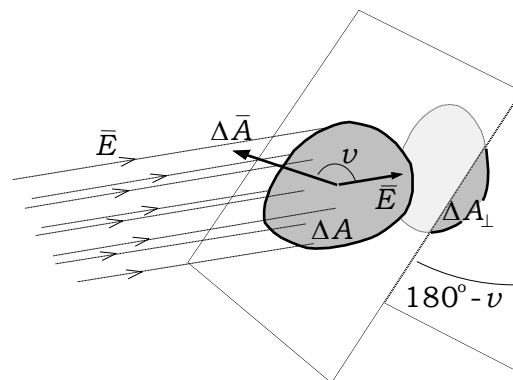
For at kunne beregne det samlede antal feltlinier gennem vilkårlige flader må vi udvide vores matematiske udtryksformåen.

For de flader vi behandler vælger vi en positiv side. (Det er muligt hvis fladen er lukket (f.eks. en kugle) eller hvis fladen F har én randkurve k . Det er ikke muligt for et Möbiusbånd.)



Vi betragter kun flader uden knæk (differentiable flader). Et udsnit ΔA af en sådan kan betragtes som plant hvis det er tilstrækkelig lille. Og feltlinierne gennem udsnittet kan betragtes som lineære og parallelle.

Udsnittet ΔA repræsenteres nu af en vektor $\Delta \vec{A}$ som er positiv normalvektor til udsnittet og hvis længde angiver arealets størrelse. $\Delta \vec{A}$ indeholder således både udsnittets størrelse og dets rumlige orientering.



Sammen med $\Delta \vec{A}$ og ΔA er tegnet projektionen ΔA_{\perp} af ΔA på en plan vinkelret på \vec{E} .

Der gælder

$$\vec{E} \cdot \Delta \vec{A} = E \cdot \Delta A \cdot \cos v = \pm E \cdot \Delta A_{\perp}$$

positiv når feltlinierne løber gennem fladen i normalens retning og negativ - som her - når de løber modsat.

Da E er proportional med feltlinietætheden ses heraf at $\vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$ er proportional med antallet af feltlinier gennem det lille areal $\Delta \vec{A}$.

Eller vi kan sige at $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ er proportional med det differentielle antal feltlinier dN gennem det differentielle areal $d\vec{A}$, $dN \propto |\vec{E} \cdot d\vec{A}|$

”Proportionalt med” og ”antal feltlinier” må vi sige når vi tegner feltlinierne. Men antallet af feltlinier er blot en tegnemæssig illustration af begrebet *fluks* som bygger på $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ uden ”proportional med”. Det behandles i næste afsnit.

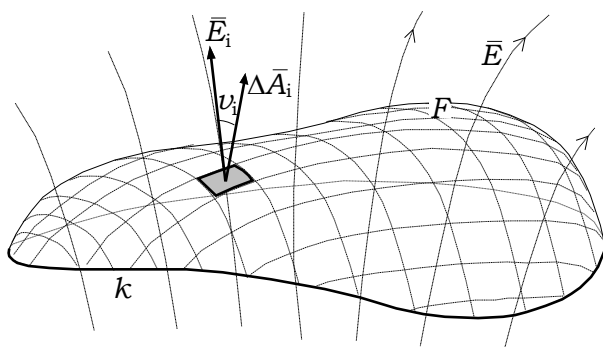
1.7. Fluksen gennem en flade

$\vec{E} \cdot d\vec{A}$ er det differentielle bidrag til fluksen Φ , d.v.s. $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$ således at fluksen gennem en flade F er

$$\Phi_F = \int_F d\Phi = \int_F \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (6)$$

Er jordforbindelsen ved at ryge? Så skal integralet *bare* opfattes som en kort betegnelse for grænseværdien af summen $\sum_i E_i \cos \nu_i \Delta A_i$ når fladen

deles op i uendeligt mange uendeligt små udsnit ΔA_i og der i hvert bruges den lokale værdi af E og ν .



1.7.1. Eksempel, centralfelt

Vi kan prøve at bruge det nye begreb på centralfeltet, 1.4.. Vi lader fladen være en kugle K med Q i centrum, radius r og orienterer den positivt udad.

Vi har $d\vec{A} = dA \frac{\vec{r}}{r}$ så at fluksen gennem kuglen er

$$\begin{aligned} \Phi_K &= \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_K k_c \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dA \\ &= k_c \frac{q}{r^2} \oint_K dA = k_c \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 \\ &= 4\pi k_c q = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

hvor *vacuumpermittiviteten* ϵ_0 er defineret ved

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_c} \quad (7)$$

Fluksen (illustreret ved antallet af feltlinier) gennem kuglen er altså uafhængig af radius, jf. 1.4. Fluksen er proportional med ladningen.

Vi skal nu se at dette er et specialtilfælde af Gauss's teorem.

1.8. Gauss's teorem

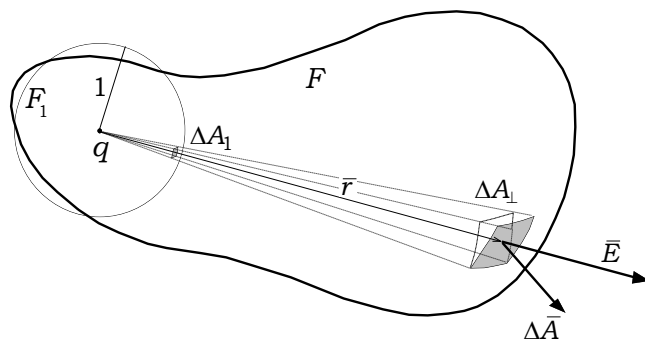
Fluksen Φ_F ud gennem en lukket flade F orienteret positivt udad er

$$\Phi_F = \frac{Q_F}{\epsilon_0} \quad (8)$$

hvor Q_F er den samlede ladning inden for F .

Vi betragter en lukket flade F orienteret positivt udad.

Først vises teoremet for en enkelt punktførmig ladning q , først ifald den ligger inden for F , så ifald den ligger uden for F . Til sidst betragtes alle ladninger i hele verden, nogle inden for, andre uden for F .



Der lægges en enhedskugle F_1 med centrum i q . Med figurens betegnelser gælder

$$\Delta A_{\perp} = r^2 \Delta A_1$$

som faktisk er substitutionen

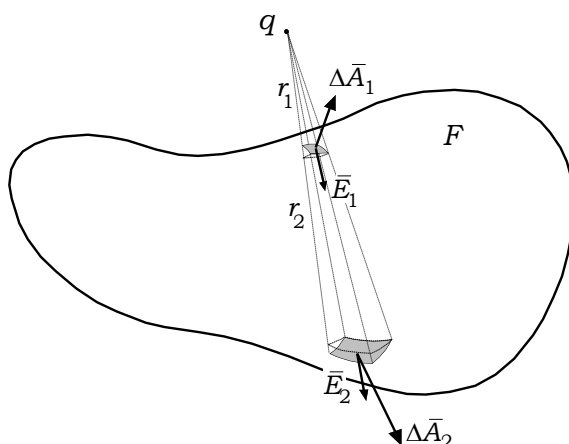
$$dA_{\perp} = r^2 dA_1$$

Vi har derfor idet $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ har samme fortegn som q

$$\begin{aligned} \Phi_F &= \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{A} = \pm \oint_F E dA_{\perp} \\ &= \oint_{F_1} k_c \frac{q}{r^2} r^2 dA_1 = \oint_{F_1} k_c q dA_1 \\ &= k_c q \oint_{F_1} dA_1 = k_c q 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (9) \end{aligned}$$

hvor variableerne \vec{A} og A_{\perp} løber over F , mens variabelen A_1 løber over hele enhedskuglen F_1 da F er lukket.

Så ifald q ligger uden for F :



Hvor som helst de retliniede feltlinier går ind igennem fladen F kan feltlinierne forlænges til endnu en skæring med F hvor de går ud igen da F er lukket.

Set fra q dækker de to arealer ΔA_1 og ΔA_2 hinanden. Og bidragene herfra ophæver hinanden. Det kan ses således:

Med $\Delta A_{1\perp}$ og $\Delta A_{2\perp}$ mener vi som sædvanligt projektionen af henholdsvis ΔA_1 og ΔA_2 på planer vinkelret på feltlinierne. Der gælder

$$\frac{\Delta A_{1\perp}}{\Delta A_{2\perp}} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta A_{1\perp}}{r_1^2} = \frac{\Delta A_{2\perp}}{r_2^2}$$

Der gælder derfor hvis q er positiv

$$\begin{aligned} \bar{E}_2 \cdot \Delta \bar{A}_2 &= E_2 \cdot \Delta A_{2\perp} = \frac{k_c q}{r_2^2} \Delta A_{2\perp} \\ &= \frac{k_c q}{r_1^2} \Delta A_{1\perp} = E_1 \cdot \Delta A_{1\perp} = -\bar{E}_1 \cdot \Delta \bar{A}_1 \end{aligned}$$

hvorfor de to bidrag ophæver hinanden.

(Samme resultat hvis q er negativ.)

Da hele fladen kan opdeles i sådanne par gælder

$$\oint_F \bar{E} \cdot d\bar{A} = 0 \quad (10)$$

Vi betragter nu N ladninger

$$q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{N-1}, q_N,$$

hvoraf de første n ligger indenfor F , mens de resterende $N-n$ ligger udenfor.

Den i ethvert punkt resulterende E -vektor kan skrives som sum af bidrag fra de enkelte ladninger (4).

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^N \bar{E}_i$$

Regningerne forløber derfor således:

$$\begin{aligned} \Phi_F &= \oint_F \bar{E} \cdot d\bar{A} \\ &= \oint_F \sum_{i=1}^N \bar{E}_i \cdot d\bar{A} = \sum_{i=1}^N \oint_F \bar{E}_i \cdot d\bar{A} \\ &= \sum_{i=1}^n \oint_F \bar{E}_i \cdot d\bar{A} + \sum_{i=n+1}^N \oint_F \bar{E}_i \cdot d\bar{A} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} + \sum_{i=n+1}^N 0 = \frac{Q_F}{\epsilon_0} \quad (8') \end{aligned}$$

ifølge (9) og (10) og hvor Q_F er den samlede ladning indenfor F .

Og det var jo det vi skulle vise.

1.9. Fluks og flukstæthed

Efter nu at have vænnet os til fluksbegrebet skal rammen på s. 4 præciseres ved

Størrelsen E af \bar{E} i et punkt er lig med flukstætheden i punktet.

Præciseringen fremgår af indførelsen af fluksen i 1.7. idet

$$|d\Phi| = |\bar{E} \cdot d\bar{A}| = E dA_{\perp},$$

hvoraf

$$E = \left| \frac{d\Phi}{dA_{\perp}} \right|$$

Undertiden kaldes E direkte flukstæthed.

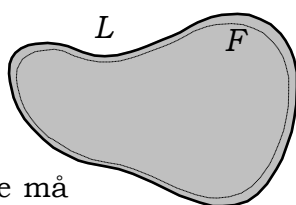
1.10. Ladninger i ledere

I ledere vil ladninger bevæge sig ved den mindste påvirkning. Det betyder at på en *ladet leder sidder ladningerne på overfladen*.

Er lederen negativ er det umiddelbart forståeligt at overskudselektronerne søger væk fra hinanden frastødt af deres negative ladning.

Også positiv overskudsladning vil lokalisere sig på overfladen idet elektronerne hellere neutraliserer atomerne inde i lederen end dem nær overfladen. Det kan være lidt sværere at forstå intuitivt, men Gauss's teorem fortæller at sådan må det være:

Lige inden for overfladen af lederen L lægges en lukket flade F .

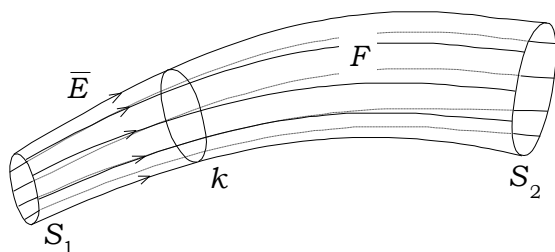


Inden for denne må ladningen være nul ifølge Gauss's teorem. Hvis f. eks. ladningen var positiv, måtte der være en positiv fluks ud gennem F , altså et udadrettet elektrisk felt. I lederen ville elektronerne derfor bevæge sig indad så længe ladningen inden for F er positiv.

Det indre af en leder er ladningsfrit og E-feltet inde i en leder er nul.

1.11. Tegning af feltlinier

Et *feltlinierør* fremkommer når man trækker feltlinier gennem alle punkter på en lukket kurve k .



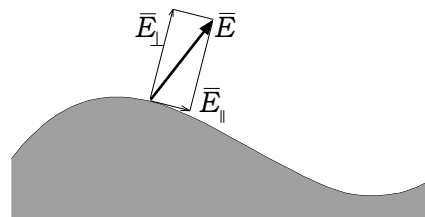
Vi betragter nu den lukkede flade F bestående af feltlinierørret mellem to snit S_1 og S_2 i dette, samt de to snit.

$\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ på feltlinierørrets overflade. Hvis der ikke er nogen ladning inden i F , er fluksen gennem F nul, så at bidragene gennem de to snit S_1 og

S_2 må være lige store og have modsat fortegn.

Et feltlinierør kan indsnævres omkring en enkelt feltlinie hvilket viser at denne ikke kan opstå eller forsvinde hvis der ikke er en ladning til stede i røret. Eller med andre ord, *feltlinier opstår på positive og forsvinder på negative ladninger*, evt. i det uendelige.

For ledere må endvidere gælde at *feltlinier som ikke udgår fra en kant på lederen, står vinkelret på lederoverfladen*.



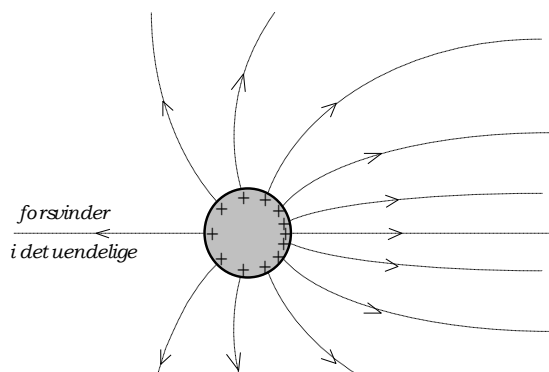
Hvis nemlig \vec{E} har en komponent \vec{E}_\parallel parallelt med overfladen - som her mod højre - vil positive ladninger forskyde sig mod højre (hvis der er noget leder til højre, altså ingen kant) hvilket vil dreje \vec{E} mod venstre.

Og endeligt:

Feltlinierne ude i det fri forløber som var de hinanden frastødende elastikker der bliver slappere jo længere de bliver og som løber fra en positiv til en negativ ladning.

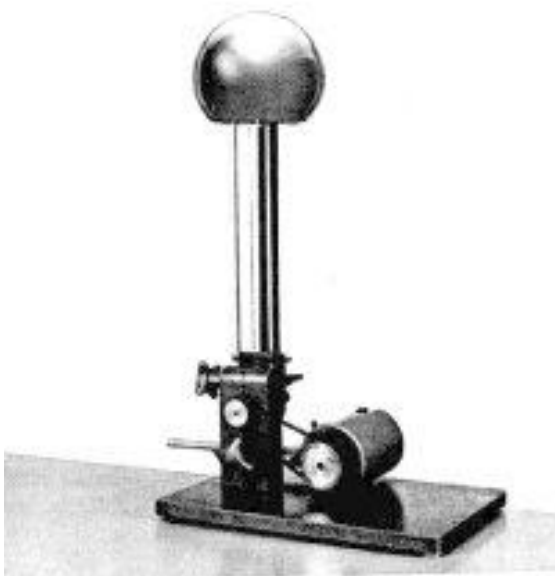
Elastikkerne sidder fast i ladningerne som de trækker i.

Denne påstand er ikke tilstrækkeligt kvantitativ til at der kan føres bevis for den. Men den kan ses f. eks. ved vores dipolfelt, 1.5.



Ligner det ikke fotografiet?

1.12. Van der Graf-generatoren m.m.



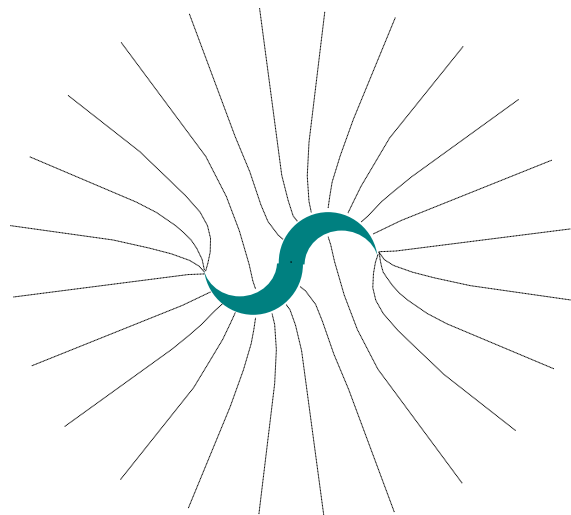
Vores *van der Graf-maskine* kan i godt vejr (- og medvind! fristes man til at tilføje. Højspænding er noget lune-fuldt noget) frembringe spændinger på op til ca. 300 000 V.

I princippet er der tale om et transportbånd som transporterer ladninger der dannes ved gnidning, op til det indre af en stor kugle hvorfra der er ledende forbindelse til kuglen. Ifølge foregående afsnit løber ladningerne ud på kugleoverfladen hvor de ophobes. Herved opstår et stærkt elektrisk felt uden om kuglen.

Kuglen er rund og med afrundede kanter omkring hullet hvor båndet løber ind i den, for at forhindre gnistudladninger fra spidser.

En sådan udladning kan demonstreres med en **elektrostatisk mølle** anbragt oven på kuglen.

Hvis møllen er negativt ladet vil et overskud af elektroner føle gensidig frastødning. En elektron nær spidsen vil i overvejende grad mærke frastødning fra møllesiden og derfor presses yderligere ud mod spidsen hvor elektronerne ophobes. Den elektriske frastødning vil hurtigt drive elektronerne ud af spidsen og ud i luften omkring spidsen hvor de vil frastøde denne så møllen roterer.



Hvis møllen er positivt ladet (hvad den var hos os) vil underskuddet af elektroner blive trukket hen mod de eksisterende positive joner. En elektron nær spidsen vil i særlig grad mærke tiltrækning fra møllesiden og derfor trækkes væk fra spidsen hvor der altså ophobes positiv ladning. Den elektriske tiltrækning vil trække elektronerne ud af molekylerne i luften omkring spidsen. Den positive ladning her vil så frastøde spidsen så møllen roterer.

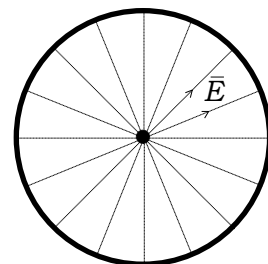
Feltlinierne er tegnet i overensstemmelse med principperne angivet på foregående side.

Bemærk at langt fra møllen (hvorfra møllen ses som et punkt) bliver feltliniebilledet det samme som fra en punktladning.

En tilsvarende opbygning med transportbånd og en stor kugle har også de større van der Graf-generatorer som fungerer som **partikelacceleratorer**.

Feltliniebilledet inde i et **GM-rør** er set fra vinduet parallelt med den centrale spids følgende:

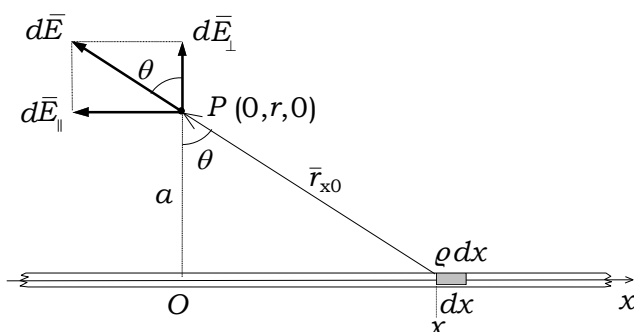
Det ses at feltet vokser ind mod centrum og at diameteren af den centrale spids er afgørende for hvor stor en spænding der skal til for at give et tilstrækkeligt stort felt til at lavinedannelsen kan sætte ind.



1.13. Kontinuerte, homogene ladningsfordelinger.

Vi ser på feltet i afstanden a fra en uendelig lang, lineær og homogen ladningsfordeling. Dette er et eksempel på hvordan en kontinuert udtværet ladningsfordeling behandles, og senere er det en illustration af Gauss's teorem som fiks genvej.

Vi kan lægge en x -akse med nul-punkt lige ud for P .



Ladningstætheden (ladning pr. længde) kaldes ρ . Ladningen på det differentielle element dx er så ρdx .

Det differentielle bidrag fra ρdx er

$$d\vec{E} = k_c \frac{\rho dx \vec{r}_{x0}}{r_{x0}^2 r_{x0}}$$

ifølge (5). Hele feltet er altså

$$\vec{E} = k_c \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_{x0}^2} \frac{\vec{r}_{x0}}{r_{x0}} dx$$

\vec{E}_{\parallel} må af symmetri grunde blive nul. Altså er $\vec{E} = \vec{E}_{\perp}$ og dens størrelse findes ved at projicere ind på lodret. For $\rho > 0$ gælder

$$E = k_c \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_{x0}^2} \cos\theta dx$$

Der gælder

$$\cos\theta = \frac{a}{r_{x0}}$$

som sammen med substitutionen

$$x = a \tan\theta, \quad dx = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$$

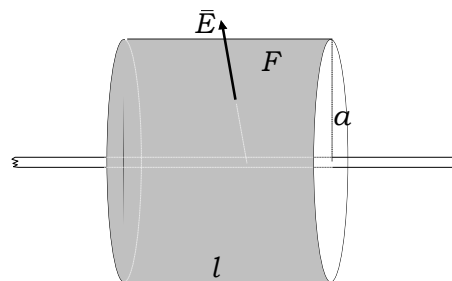
giver

$$E = k_c \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{a^2} \cos\theta \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= k_c \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{a} d\theta = \frac{k_c \rho}{a} [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2k_c \rho}{a}$$

Men i sådanne tilfælde hvor feltets retning kan forudses, viser Gauss's teorem sin styrke:

Vi lægger en cylinderflade F med længden l om lederen. Så er $Q_F = \rho l$.



Af symmetri grunde er \vec{E} vinkelret på den krumme del af cylinderen og parallel med de plane endeflader, så

$$\Phi_F = \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 2\pi a l$$

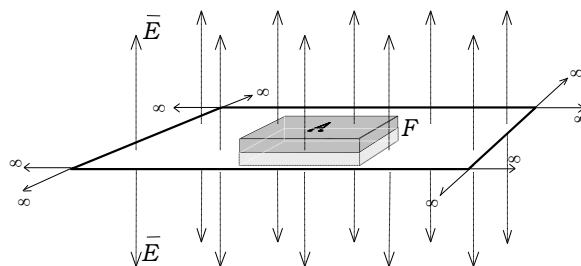
Gauss's teorem giver så

$$E \cdot 2\pi a l = \frac{\rho l}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{\rho}{2\pi a \epsilon_0} = \frac{2k_c \rho}{a} \quad (11)$$

Det var jo nemmere.

Opløftet af denne erfaring prøver vi Gauss's teorem på en uendelig, plan flade med homogen ladningsfordeling ρ , (ladning pr. areal). E -feltet må være homogent:



Vi lægger en flade F som vist på figuren. Der gælder

$$\Phi_F = E \cdot 2A \quad \text{og} \quad Q_F = \rho A$$

hvoraf

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \quad (11)$$

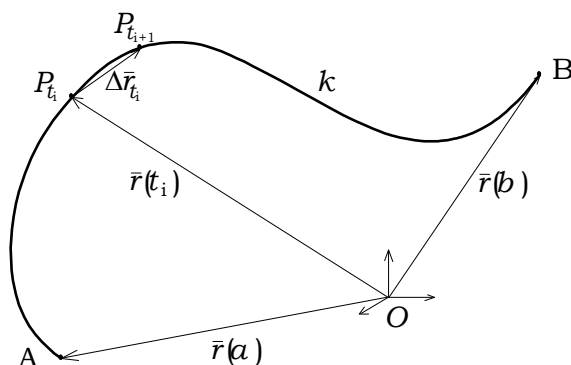
altså uafhængigt af afstanden fra fladen.

Vi bruger Gauss's teorem på samme måde i afsnittet om kapacitorer.

2. ENERGI OG ARBEJDE I ELEKTRISKE FELTER

2.1. Kurveintegral

Til beregning af varierende feltkræfters arbejde langs vilkårlige kurver behøver vi begrebet *kurveintegral*.



Kurven k der forløber fra A til B er givet ved parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OP_t} = \vec{r}(t), \quad t \in [a; b]$$

Der er endvidere defineret en vektorfunktion $\vec{F}(\vec{r})$, her kraften.

Vi indfører en inddeling (de sædvanlige n delintervaller, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) af parameterintervallet $[a; b]$ og får svarende hertil en inddeling af kurven ved punkterne P_{t_i} .

For Δt_i lille gælder tilnærmelsen

$$\Delta \vec{r}_i \approx \vec{r}'(t_i) \Delta t_i$$

Svarende til den valgte inddeling kan vi danne

$$\begin{aligned} A_k^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \Delta \vec{r}_i \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i) \Delta t_i \end{aligned}$$

Nu er $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = f(t)$ en ganske almindelig reel funktion af t så at

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i$$

er en til inddelingen hørende venstresum for funktionen $f(t)$. Hvis $f(t)$ er kontinuert, har venstresummen og dermed $A_k^{(n)}$ en grænseværdi for den almindelige matematiske forfining af inddelingen. Denne grænseværdi kaldes kurveintegralet for kraften $\vec{F}(\vec{r})$

langs kurven k , eller kraftens arbejde langs k .

$$A_k = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Med substitutionen $d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt$ får vi endelig

$$A_k = \int_k \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (12)$$

Denne integraludgave kaldes kurveintegralet af kraften langs kurven k og er altså den fine og helt tilfredsstillende (!?) definition af kraftens arbejde fra A til B langs kurven k .

2.1.1. Eksempel, centralfelt

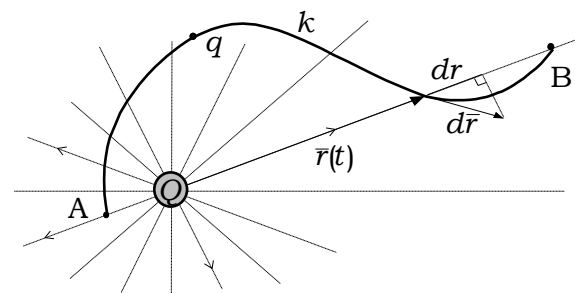
Vi prøver den straks på centralfeltet, 1.4., hvor vi kender resultatet ifald vi bevæger os radially.

Kraften er givet ved (3') og (5). Her

$$\vec{F}(\vec{r}) = k_c \frac{Qq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (13)$$

Så længe vi ikke bruger udtrykket for den reelle funktion $F(r) = k_c Qq r^{-2}$ gælder regningerne for alle central-symmetriske felter.

Vi flytter q mellem to vilkårlige punkter A og B .



Den grundige matematiske udgave:

$$\begin{aligned} A_k &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b F(r(t)) \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{F(r(t))}{r(t)} \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) dt \end{aligned}$$

Her er $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$ er reel funktion.

Ved at differentiere identiteten $\bar{r}^2 = r^2$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \bar{r}^2 &= \frac{d}{dt} (\bar{r} \cdot \bar{r}) = 2\bar{r} \cdot \bar{r}' \\ \frac{d}{dt} r^2 &= 2r r'\end{aligned}$$

ses at

$$\bar{r} \cdot \bar{r}' = r r'$$

og ved forlængning med dt at

$$\bar{r} \cdot d\bar{r} = r dr \quad (14)$$

(14) fremgår også af figuren.

Hermed og med substitutionen $dr = r' dt$ fortsætter integrationen

$$\begin{aligned}A_k &= \int_a^b \frac{F(r(t))}{r(t)} r(t) r'(t) dt \\ &= \int_a^b F(r(t)) r'(t) dt = \int_{r(a)}^{r(b)} F(r) dr\end{aligned}$$

Her forsvandt vejen og kun afstandene fra centrum til begyndelsespunktet r_A og slutpunktet r_B blev tilbage. Dette gælder altså for alle centralsymmetriske felter.

Det uddybes i afsnit 2.2.

Fysikere (og matematikere når de ikke ligefrem underviser) vil komme til dette resultat ad en mere direkte vej:

$$\begin{aligned}A_k &= \int_k \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_k F(r) \frac{\bar{r}}{r} \cdot d\bar{r} \\ &= \int_k \frac{F(r)}{r} \bar{r} \cdot d\bar{r} = \int_k \frac{F(r)}{r} \frac{1}{2} d(\bar{r}^2) \\ &= \int_k \frac{F(r)}{r} \frac{1}{2} d(r^2) = \int_{r(a)}^{r(b)} \frac{F(r)}{r} r dr \\ &= \int_{r(a)}^{r(b)} F(r) dr\end{aligned}$$

hvor differentiationen (14) af identiteten $\bar{r}^2 = r^2$ er brugt særligt fikst.

Vi fortsætter med coulombfeltet:

$$\begin{aligned}A_k &= \int_{r_A}^{r_B} k_c \frac{Qq}{r^2} dr = k_c Qq \int_{r_A}^{r_B} r^{-2} dr \\ &= k_c Qq [-r^{-1}]_{r_A}^{r_B} \\ &= k_c Qq \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (15)\end{aligned}$$

som vi genkender fra gravitationsfeltet.

Så meget som træning i begreberne.

I det gennemførte eksempel ses den flyttede ladning q at optræde som en konstant overalt. Den kan derfor holdes uden for regningerne og ganges på til sidst analogt med som vi gjorde da vi udtrykte kræfter ved (3').

Det er pointen i det afsnit 2.3.

2.2. Konservativt kraftfelter

Et kraftfelt kaldes *konservativt* hvis for *vilkårlige* punkter A og B feltkraftens arbejde er det samme langs *alle* kurver der fører fra A til B.

Det kan også udtrykkes således at feltkraftens arbejde mellem to punkter er *uafhængigt af vejen*.

Vi har i 2.1.1. vist at centralsymmetriske felter er konservative.

Der gælder endvidere at en vilkårlig fordeling af ladninger frembringer et konservativt felt:

Vi betragter feltet fra ladningerne q_i , $i = 1, 2, \dots, N$ og fører en ladning q langs kurven k fra A til B.

Feltkraftens arbejde er ifølge (12)

$$\begin{aligned}A_k &= \int_k \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = \int_k \left(\sum_{i=1}^N \bar{F}_i(\bar{r}) \right) \cdot d\bar{r} \\ &= \int_k \left(\sum_{i=1}^N \bar{F}_i(\bar{r}) \cdot d\bar{r} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\int_A^B \bar{F}_i(\bar{r}) \cdot d\bar{r} \right)\end{aligned}$$

Integralerne i sidste udtryk er alle coulombfelter som er behandlet i eksempel 2.1.1. De afhænger ikke af kurven k . Det gør A_k altså heller ikke.

2.3. Potentiale

Vi betragter et vilkårligt elektrisk felt $\vec{E}(\vec{r})$ og en ladning q anbragt i punktet P .

Vi vælger et udgangspunkt for potentiel energi O .

Den potentielle energi af ladningen q i punktet P er så det arbejde feltkraften udfører når ladningen flyttes fra P til O .

Vi ved nu at vi kan vælge vejen k frit når vi skal beregne dette arbejde. Den beregnes

$$\begin{aligned} A_k &= \int_P^O \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_P^O q \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= q \int_P^O \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = qV(P) \end{aligned}$$

hvor vi har indført *potentialet* $V(P)$ i punktet P ved

$$V(P) = \int_P^O \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_O^P \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (16)$$

Den potentielle energi af ladningen q i punktet P er så

$$E_{\text{pot}}(q, P) = qV(P) \quad (17)$$

Men bemærk at potentialet i et punkt kan beregnes uden der anbringes en ladning i punktet.

Omvendt kan altså potentialet i et punkt karakteriseres som den potentielle energi pr. ladning der evt. anbringes i punktet.

2.3.1. Eksempel, centralfelt

Vi bruger tidligere viden om at nulpunktet passende anbringes i det uendeligt fjerne. Punktet P ligger i afstanden r fra centralladningen Q .

Hvis vi vælger en radial vej bliver overgangen væk fra prikproduktet helt trivial. Vi får med (5)

$$\begin{aligned} V(P) &= \int_r^\infty \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty k_c \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} \\ &= k_c Q \int_r^\infty r^{-2} dr = k_c Q [-r^{-1}]_r^\infty = k_c \frac{Q}{r} \end{aligned}$$

og

$$E_{\text{pot}}(q, r) = k_c \frac{Qq}{r} \quad (18)$$

2.4. Spænding

Spændingen $U(A, B)$ mellem to punkter A og B er

$$U(A, B) = |V(A) - V(B)| =$$

$$\left| \frac{E_{\text{pot}}(q, A) - E_{\text{pot}}(q, B)}{q} \right| = \left| \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \right| \quad (19)$$

Spændingen mellem to punkter er altså udvekslet elektrisk energi pr. ladning der flyttes mellem de to punkter. Spændingen eksisterer og kan beregnes ved (19) selv om der ikke går strøm.

2.5. Ækvipotentialflader

Hvis kurven k_{\parallel} vælges langs en feltlinie som i 2.3.1. bliver prikproduktet i (16) simpelt:

$$\int_{k_{\parallel}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{k_{\parallel}} E(\vec{r}) dr$$

Hvis kurven k_{\perp} vælges så den stedse går vinkelret på feltlinierne bliver prikproduktet endnu simplere

$$\int_{k_{\perp}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Der kan lægges flader vinkelret på feltlinierne. Går man rundt på en sådan flade, så går man altså langs en k_{\perp} , og så er potentialet altså konstant. Går man rundt med en ladning i lommen, vil elektriske kræfter ikke udføre noget arbejde på ladningen. Flader vinkelret på feltlinierne kaldes *ækvipotentialflader*.

2.5.1. Eksempel, centralfelt

Ækvipotentialfladerne for et centralfelt er kugleskaller. Og vi har jo allerede set at potentialet her er konstant.

Dipolfeltet 1.5. lader sig også let forsyne med ækvipotentialflader (hvoraf kun deres snit med tegnepladet kan tegne, naturligvis. Men man skal endelig forestille sig dem som flader i rummet).

2.5.2. Enheder

Af (3') fremgår det at SI-enheden for E er N/C .

Af 2.3. fremgår det at SI-enheden for potentiale er J/C .

Af 2.4. fremgår det af det også må være den enhed V (volt) vi allerede har brugt så flittigt, men uden en ordentlig definition. Den kommer nu!

Og pas så på! Vi har nu to veer, V og V , med forskellig betydning!

$$\text{Enheder for } V \text{ og } U: V = \frac{J}{C} = \frac{Nm}{C}$$

Sidste udtryk viser at enheden for feltstyrken E kan gives to lige fortolkningsvenlige udgaver

$$\text{Enheder for } E: \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

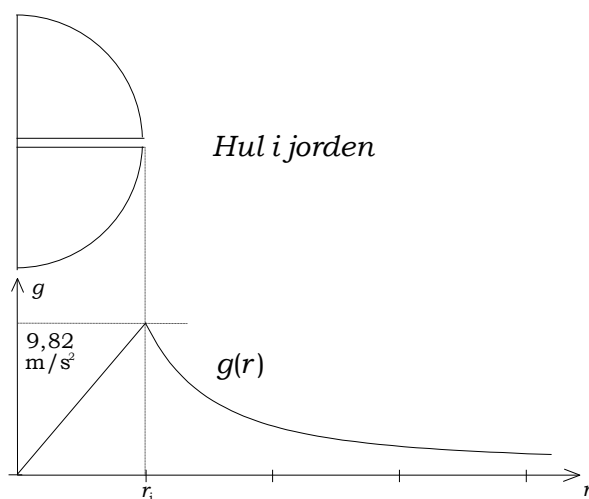
Den sidste enhed for E fremgår også af integralet (16). Det skal tolkes som V pr. m tilbagelagt langs en feltlinie.

Joules lov for varmeudviklingen i en resistor bliver rigtig pr. definition (af spænding).

(ups, vi plejer at bruge Q for varme! Og det er helt umuligt her. E for energi kan vi heller ikke bruge. Og således gik det til at disse universitære noter måtte ty til folkeskoleprincipper:)

$$\begin{aligned} \text{Udviklet varme} &= UIt = UQ \\ &= \frac{\text{elenergi}}{\text{ladning}} Q = \text{elenergi} \end{aligned}$$

-det var flovt!



2.6. Gravitationsanalogier

Det er klart at det meste af de foregående sider kunne skrives med andre betegnelser, men næsten samme ord med udgangspunkt i Newtons gravitationslov i stedet for Coulombs lov.

Meget af en sådan omskrivning ville være allerede kendt stof.

Kraftanalogier:

$$\vec{F} = \vec{E} q \quad (3')$$

$$\vec{F} = \vec{g} m$$

Man kan inføre et *gravitationspotentiale* $\Gamma = \Gamma(P)$ så at

$$E_{\text{pot}}(q, P) = V(P) q$$

$$E_{\text{pot}}(m, P) = \Gamma(P) m$$

For et homogent tyngdefelt er

$$\Gamma(P) = \Gamma(h) = gh$$

For et centralfelt tyngdefelt er

$$\Gamma(P) = \Gamma(r) = -\frac{GM}{r}$$

hvor M er centralmassen.

Havets overflade som ikke er en kugle, er en ækvipotentialflade fordi vand er flydende! Ta' den!

-og tænk over den!

Gauss's teorem brugt på jorden (samme gælder for en vilkårlig kuglesymmetrisk massefordeling) viser at fluksen gennem jordoverfladen er uafhængig af hvor inden for overfladen jordens masse anbringes. Hvis vi ønsker feltet ens overalt på jorden skal vi bare forestille os massen anbragt kuglesymmetrisk, f. eks. al massen i centrum. (Beviset herfor voldt efter sigende Newton stort besvær.)

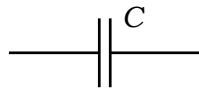
Feltet i et dybt hul i jorden har, ligeledes i følge Gauss's teorem, en størrelse som ikke afhænger af den masse som ligger længere væk. Og det der ligger inden for hullets afstand til centrum kan alt sammen anbringes i centrum. Det er herefter let at vise at tyngdeaccelerationen vokser proportionalt med afstanden fra centrum og til jordoverfladen.

Derefter aftager tyngdeaccelerationen proportionalt med r^{-2} .

3. KAPACITOREN

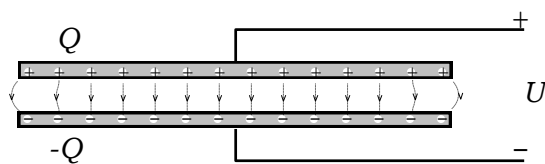
Kapacitoren (den gamle betegnelse er kondensator) er en komponent i elektriske kredsløb.

Symbolet i elektriske kredsløb er



En kapacitor består i princippet af to plane ledere tæt overfor hinanden, men uden elektrisk kontakt.

På følgende figur er kapacitoren udformet som en pladekapacitor, d.v.s. to metalplader overfor hinanden.



Forbindes kapacitoren på figuren til en spænding U vil der kortvarigt løbe en strøm idet en positiv ladningsmængde Q løber ind i den øverste plade og en lige så stor ladningsmængde løber ud af den nederste.

Q kaldes kapacitorens ladning.

Selv om der altså ikke er ledende forbindelse, kan der kortvarigt løbe en strøm, den såkaldte *forskydningsstrøm*. Men i forbindelse med vekselstrøm skal man ikke tilføje kortvarigt. Her har kapacitoren sin helt store anvendelse.

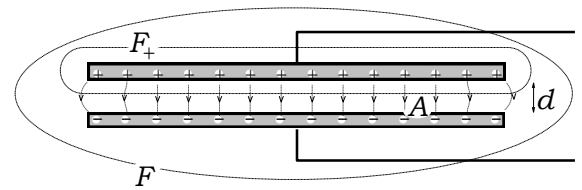
De positive og negative ladninger vil placere sig på overfladerne hvor deres afstand kan blive mindst.

Hvis afstanden mellem pladerne er lille i forhold til pladernes vandrette udstrækning, vil kun en lille del af ladningen være i nærheden af randen. For denne ladning vil feltlinierne udvise *randeffekt*, d.v.s. de krummer. Resten af ladningen er i omgivelser der er ens til alle sider. De er derfor ensartet fordelt, feltlinier der udgår fra dem er rette linier, *feltet er homogent*.

Når vi kan se bort fra randvirkningen har vi derfor ifølge (19) integreret langs en feltlinie

$$U = \left| \int_+ \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \right| = E d \quad (20)$$

hvor E er feltstyrken og d er afstanden mellem pladerne.



Uden om kapacitoren (ved fladen F) giver kapacitoren praktisk talt intet felt. Fluksen igennem F er nul, ladningerne på de to plader er numerisk lige store.

En flade F_+ der alene omslutter den positive flade, gennemskæres af det homogene felt mellem pladerne. Integralet i (8^o) udregnes derfor let og vi får at fluksen gennem F_+ er

$$\Phi_{F_+} = \oint_{F_+} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (21)$$

hvor A er pladearealet.

Af (20) og (21) fås

$$Q = \epsilon_0 \frac{A}{d} U = CU \quad (22)$$

hvor

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (23)$$

kaldes pladekapacitorens kapacitans.

Vacuumpermittiviteten ϵ_0 i (22) forudsætter vakuum mellem pladerne. Man kan forøge kapacitansen væsentligt med visse *dielektriske* (*polariserbare*) stoffer mellem pladerne. Den faktor hvormed kapacitansen øges, kaldes stoffets *dielektricitetskonstant* ϵ_r (r for relativ). Den er 4-6 for glas og 80 for vand, men meget tæt på 1 for luft. (22) bliver så til

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (24)$$

Kapacitorer kan udformes på mange andre måder end som pladekapacitorer. For alle gælder

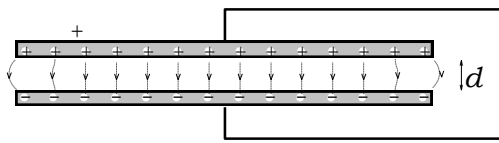
$$Q = CU \quad (25)$$

med en for kapacitoren karakteristisk kapacitans C .

3.1.1. Enheder

SI-enheden for C er F farad, $F = \frac{C}{V}$

3.2. Energi i kapacitoren



Når kapacitoren rummer ladning, rummer den også *potentiel energi* E_{kap} , *elektrostatisk energi*.

Vi kan beregne denne ved at føre små ladningsmængder Δq fra den negative til den positive plade. Øjebliksværdier af kapacitorens ladning og spænding kaldes henholdsvis q og u .

Vi har da ved hjælp af (17)

$$\Delta E_{\text{kap}} = u \Delta q$$

eller med differentialer

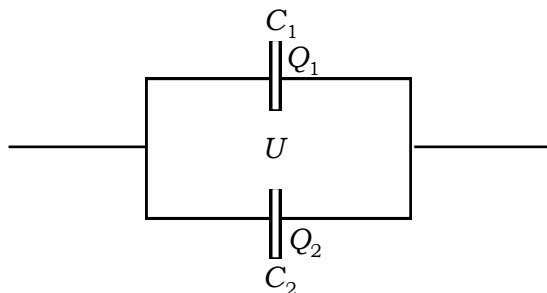
$$dE_{\text{kap}} = u dq$$

så at den potentielle energi i en kapacitor med ladningen Q ved spændingen U ved hjælp af (24) fås til

$$\begin{aligned} E_{\text{kap}} &= \int_0^Q u dq = \int_0^Q \frac{1}{C} q dq = \frac{1}{C} \left[\frac{1}{2} q^2 \right]_0^Q \\ &= \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} UQ = \frac{1}{2} C U^2 \end{aligned} \quad (26)$$

3.3. Parallel- og serieforbindelse af kapacitorer

Når to forskellige kapacitorer *parallelforbindes*, er der samme spænding U over dem.



Der gælder endvidere

$$Q_1 = C_1 U \quad \text{og} \quad Q_2 = C_2 U$$

Den samlede ladning i parallelforbindelsen er

$$Q = Q_1 + Q_2$$

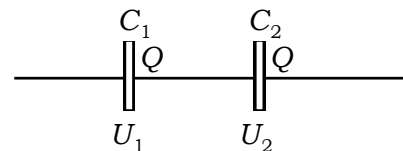
Vi har så

$$Q = (C_1 + C_2)U$$

hvor $C_1 + C_2$ er konstant. Det viser at parallelforbindelsen har kapacitorenegenskaben (24) med erstatningskapacitansenkapacitansen

$$C_p = C_1 + C_2 \quad (27)$$

Når to forskellige kapacitorer sættes i *serieforbindelse*, vil de altid rumme samme ladning Q . (På de to forbundne plader må ladningen på den ene komme fra den anden.)



Der gælder endvidere

$$Q = C_1 U_1 \quad \text{og} \quad Q = C_2 U_2$$

samt for spændingen U over hele serieforbindelsen

$$U = U_1 + U_2$$

Vi har så

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q$$

hvor $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ er konstant. Det viser at

serieforbindelsen har kapacitorenegenskaben (24) med erstatningskapacitansenkapacitansen

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (28)$$

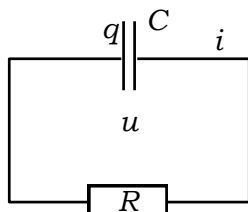
eller

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (28')$$

3.4. Op- og afladning af kapacitor

En kapacitor med kapacitansen C har ladningen Q og spændingen U . (25) gælder.

Vi **aflader** ladningen Q gennem en resistor med resistansen R .



u , i og q er øjebliksværdier af spænding, strøm og ladning. Spændingen over kapacitoren er den samme som over resistoren.

Vi har

$$i = -\frac{dq}{dt}, \quad q = Cu \quad \text{og} \quad u = Ri$$

-, fordi ladningen aftager.

Heraf finder vi differentilligningen

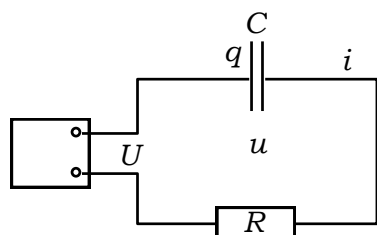
$$C \frac{du}{dt} = -\frac{1}{R} u$$

som har løsningen

$$u = U e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (29)$$

i og q aftager med samme eksponentialfunktion.

Opladning forekommer ved at en spænding pludseligt indskydes i kredsløbet.



Vi har her

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad q = Cu \quad \text{og} \quad U = u + Ri$$

hvoraf

$$\frac{d(u-U)}{dt} = -\frac{1}{RC}(u-U)$$

med løsningen

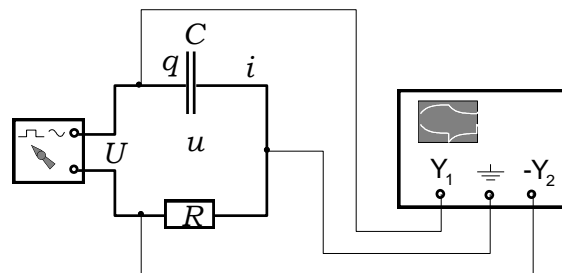
$$u = U(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \quad (30)$$

(Begyndelsesbetingelsen er $U = 0$).

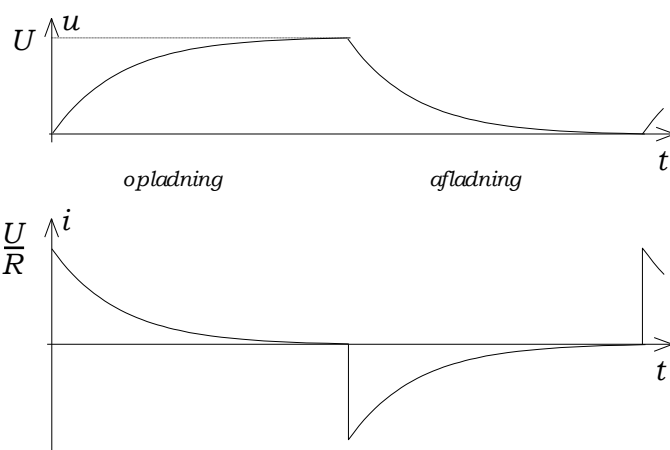
i findes af $U = u + Ri$ til

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Op- og afladning kan udføres med en *firkantspænding* på en *tonegenerator* og iagttages på et *oscilloskop*, jf. næste afsnit.

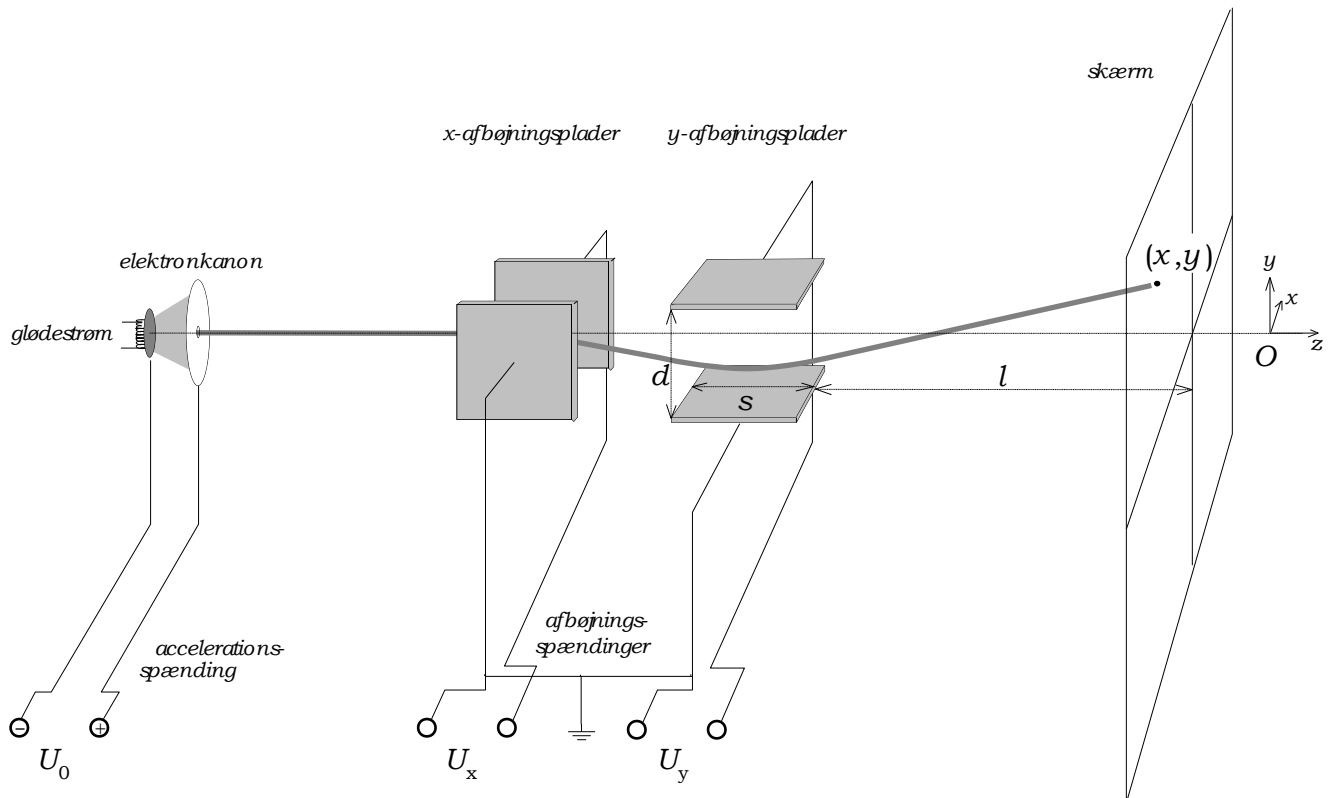


Strømmen vises som spændingen over R . I så fald vil strømmen blive vist med fortegn. Det kunne se sådan ud



3.5. Ladede partikels bevægelse i

homogent elektrisk felt



Billedrøret i fjernsyn og i oscilloskoper indeholder de to almindeligste eksempler på ladede partiklers bevægelse i elektriske felter, *lineær acceleration* og *afbøjning*.

I *elektronkanonen* accelereres elektroner lineært af spændingen U_0 . De der har retning mod det lille hul, bevæger sig retliniet videre hen mod afbøjningspladerne. Her kan man ved spændingerne U_x og U_y styre elektronstrålen så den rammer i punktet (x, y) på skærmen. (Bemærk koordinatsystemet helt ude til højre!)

Glødestrømmen opvarmer den negative elektrode i elektronkanonen hvorved denne udsender elektroner. De accelereres af U_0 og opnår energien

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_z^2 = U_0 e$$

Vi behandler y -afbøjningen.

Mellem pladerne er feltet homogent og

$$E = \frac{U_y}{d}$$

Banekurven er en *parabel* som ved det frie fald i et homogent tyngdefelt.

Under passagen af varighed Δt af pladerne får elektronerne en v_y af størrelsen

$$v_y = a_y \Delta t = \frac{E e}{m_e v_z} = \frac{U_y e s}{d m_e v_z}$$

hvor a står for acceleration.

I virkelige rør gælder $s \ll l$ og $d \ll l$.

Under disse forudsætninger rammer elektronstrålen i

$$y = v_y \frac{l}{v_z} = \frac{U_y e s l}{d m_e v_z^2} = \frac{s}{2d} l \frac{U_y}{U_0}$$

Tilsvarende fås for x -afbøjningen.

Det er egentligt et pudsigt udtryk. Hverken elektronens ladning eller dens masse indgår. (Det kan nu godt indses enkelt. Hvis elektronens ladning tænkes fire gange større, betyder det fire gange større energi og derfor fordobling af hastigheden v_z . Strækningerne s og l passerer derfor på den halve tid. Når også kraften og dermed a_y firedobles, bliver v_y fordoblet og y uændret. Fire gange mindre elektronmasse giver samme ændringer.)

En særlig interessant proportionalitet uddrages:

$$(x, y) \propto (U_x, U_y)$$

Det er netop sådan vi gerne vil se spændingerne U_x og U_y afbildet.

4. MAGNETFELTER

4.1. Indledning

I 1820 viste *H. C. Ørsted* i sit berømte forsøg at *elektricitet* og *magnetisme* var forbundne fænomener.

I 1873 samlede *James Clerk Maxwell* al den derefer opnåede viden om elektricitet og magnetisme i de fire maxwellske ligninger.

I 1905 var udgangspunktet for *Albert Einsteins specielle relativitetsteori* et modsætningsforhold mellem Maxwells ligningerne og det klassiske billede af rum og tid. Med relativitetsteoriens rum-tidsopfattelse blev elektriske og magnetiske fænomener to sider af samme sag (se Einsteins tog kap.10) således at kræfter som i ét referencesystem fremstod som elektriske i et andet optrådte som magnetiske.

Men i et givet referencesystem betjener Maxwells ligninger sig af elektriske og magnetiske felter som to forbundne fænomener. Vi behandler dem således og fortrænger spørgsmålet om den relativistiske transformation mellem forskellige systemer.

De magnetiske fænomener kan knyttes til to poler, *nord* og *syd*. De optræder altid som *dipoler*. I modsætning til de elektriske ladninger som kan optræde separat, findes der ikke magnetiske monopoler.

Nord kaldes den pol på en magnet som peger mod geografisk nord når magneten anbringes så den kan svinge i et vandret plan. Ved jordens geografiske nordpol har jorden altså en magnetisk sydpol.

Først fastlægger vi magnetfelters *retning* ud fra elementære erfaringer med magneter.

I den forbindelse tegner vi feltlinier blot som retningsangivelse, men uden fra starten at kunne give dem det konkrete og tilfredsstillende indhold som vi kunne for de elektriske feltliniers vedkommende.

Dernæst kan vi slutte *kvalitativt* fra Ørsteds forsøg til en eksperimentel opstilling som muliggør en kvantitativ definition af magnetfelters *størrelse*.

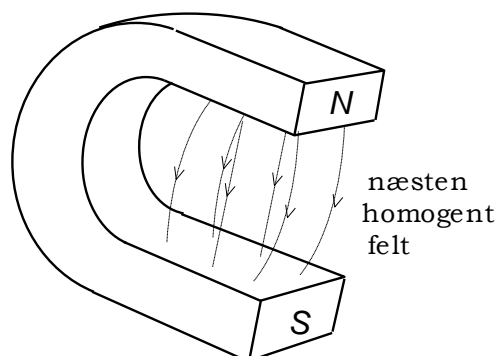
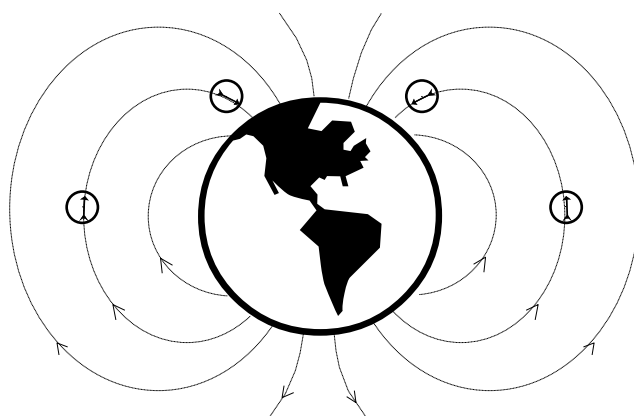
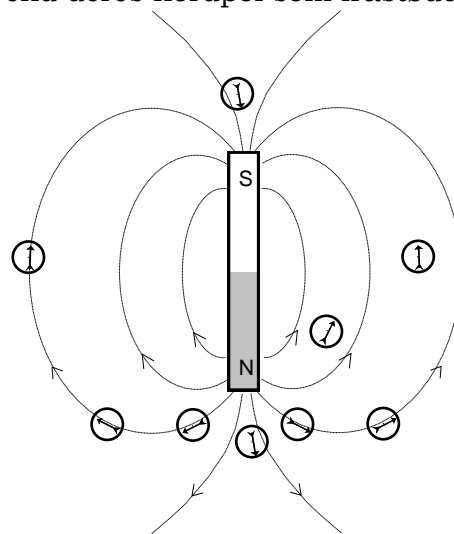
Magnetfelter betegnes \vec{B} og kaldes både *B-felter*, *magnetfelter*, *magnetisk flukstæthed* og *magnetisk induktion*.

4.2. Magnetfelters retning

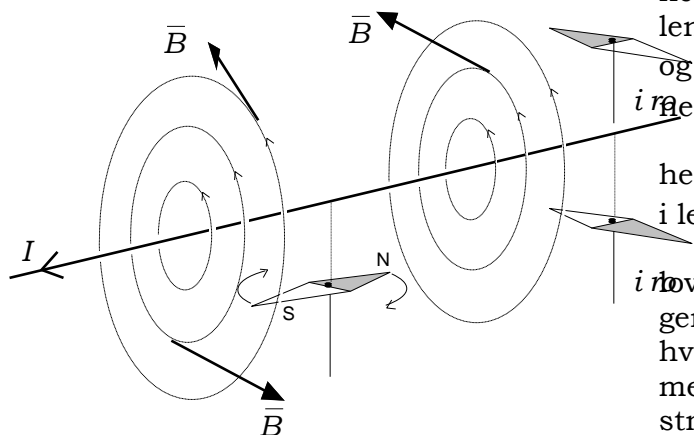
De magnetiske forhold omkring en *stangmagnet* kan undersøges med små *prøvemagneter*.

Vi vedtager at feltretningen er den hvori nordpolen på en lille prøvemagnet peger. Dermed udgår feltlinierne fra nordpolen og går ind i sydpolen.

Nordpolen trækkes i feltets retning, mens sydpolen trækkes i den modsatte retning. De små magneter ved nordpolen på stangmagneten nedenfor vil trækkes ind mod nordpolen fordi deres sydpol som tiltrækkes er tættere på end deres nordpol som frastødes.



4.3. Ørsteds forsøg



(Se evt. <http://www.sndrborg-gym.dk/fify/Elever/2.g/17-12-2003.htm>)

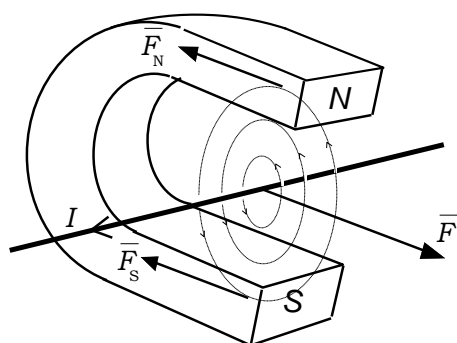
Strømmen i ledningen får magnetnåle til at stille sig vinkelret på strømretningen. Alle tre nåle på tegningen befinder sig lodret over eller under ledningen. Hvis de var i samme vandrette plan som ledningen ville de stille sig lodret.

De magnetiske feltlinier må tegnes som cirkler omkring ledningen og magnetnålene stiller sig så som tangenter til feltlinierne med nordpolen pegende i feltets retning.

Retningen huskes ved *tommelfingerreglen*:

Grib om ledningen med højre hånd med tommelfingeren i strømmens retning. Da vil de fire andre fingre angive B -feltets rotationsretning omkring ledningen.

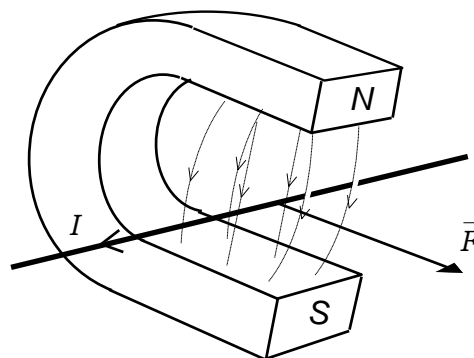
Hvis en hesteskomagnet anbringes om ledningen som vist på følgende figur, vil både nord- og sydpolen påvirkes i samme retning, \vec{F}_N og \vec{F}_S .



Strømmen påvirker magneten gennem sit magnetfelt. Tommelfingerreglen viser hvilken vej magnetfeltet peger og altså hvilken vej \vec{F}_N og \vec{F}_S skal tegnes.

Men Newtons 3. lov viser at også hesteskomagnetet påvirker strømmen i ledningen, \vec{F} .

Tommelfingerreglen og Newtons 3. lov er tilstrækkeligt til at finde retningen. Men når man betragter den kraft hvormed magneten påvirker strømmen, er det mere direkte at betragte strømmen i feltet fra hesteskomagnetet. Dette felt er (næsten) homogent og går lodret nedad fra nord til syd



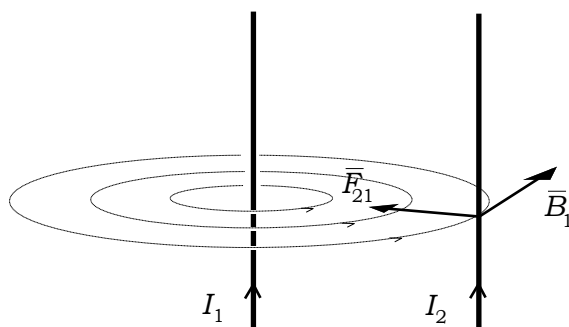
I denne forbindelse gælder *lillefingerreglen*:

Anbring højre hånd så magnetens B -feltlinier løber ind i håndfladen og fingrene peger i strømmens retning. Da vil ledningen påvirkes til lillefingersiden.

Det er i denne situation vi kan definere størrelsen af magnetfeltet. Men vi mangler logisk set definitionen på strømmeheden.

Vi skal derfor starte med at indse at to parallelle strømme påvirker hinanden og på det grundlag definere enheden ampere for strøm.

På følgende figur ses to parallelle strømme I_1 og I_2 .



Når vi skal finde kraften \vec{F}_{21} på I_2 fra I_1 , skal vi tegne feltet \vec{B}_1 fra I_1 på I_2 's plads.

Derefter skal lillefingerreglen bruges for I_2 i dette felt.

Det er en god øvelse at finde kraften \vec{F}_{12} på helt tilsvarende måde og glæde sig over at Newtons 3. lov ligger indlisså stille.

Opstillingen vender tilbage i afsnit 4.11.

4.3.1. Enheden 1 A

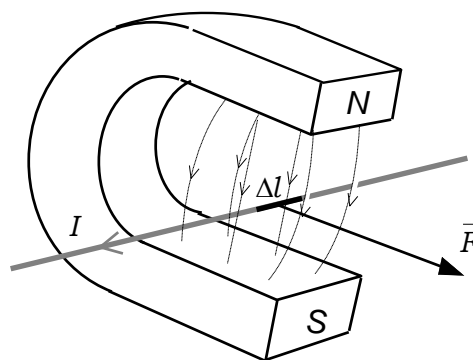
Uden at behøve et kvantitativt kendskab til magnetfelter kan en definition af grundenheden 1 A nu gives på basis direkte af andre grundenheder idet $N = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$:

Når lige store strømme i to uendeligt lange, uendeligt tynde, lineære og parallelle ledninger anbragt i vakuum og i en indbyrdes afstand af 1 m, påvirker hinanden med kraften $2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$, da er strømmene i ledningerne 1 A.

Dermed er så de afledede enheder C for ladning og V for spænding endeligt på plads idet $C = \text{A} \cdot \text{s}$ og $V = \text{J}/\text{C}$.

Man gør udtrykkeligt opmærksom på at det kun var den fundamentale definition af grundenheden vi manglede. Strøm i en ledning er defineret som mål for ladningsmængde (d.v.s. antal elektroner) pr. tid der passerer et tværsnit af ledningen.

4.4. Laplaces lov



Kraften på den strømførende ledning på figuren er kun tilstede når der går en strøm, altså når elektronerne bevæger sig. Vi må derfor tro at kraften påvirker den enkelte bevægede elektron. Hvis vi fordobler strømmen ved at lægge to ens ledninger ved siden af hinanden er det derfor trivielt at kraften fordobles.

Hvis vi derimod fordobler strømmen ved at fordoble elektronernes hastigheder, er det ikke trivielt at kraften fordobles.

Den erfaring går under navnet Laplaces lov.

Den siger endvidere at kraften ΔF på en lille del Δl af ledningen er proportional med Δl . Det er trivielt igen med henvisning til kraften på de enkelte bevægede elektroner.

Laplaces lov siger altså at $\frac{\Delta F}{I \Delta l}$ er

konstant i opstillingen på figuren. Men magneten kan jo skiftes ud hvilket giver et andet forhold af brøken.

Brøkens værdi kaldes størrelsen af B -feltet. Altså

$$B = \frac{\Delta F}{I \Delta l} \quad (31)$$

eller

$$\Delta F = I \Delta l B \quad (31')$$

Denne sammenhæng forudsætter dog at ledningen er retliniet og strømretningen og B -feltet er ortogonale. Det endelige differentielle udtryk for kraften $d\vec{F}$ på lederelementet $d\vec{r}$ er

$$d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B} \quad (32)$$

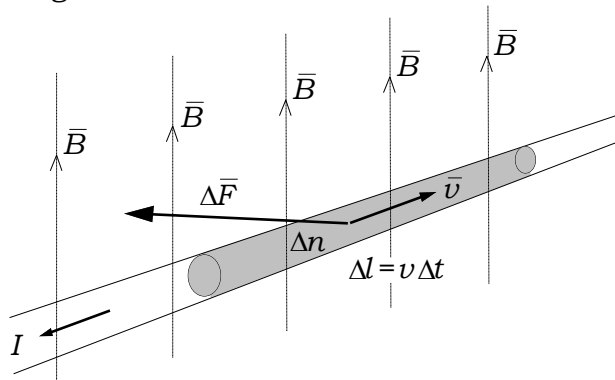
I får lejlighed til at fordybe jer i dette udtryk i laboratorieøvelsen, Laplaces lov.

4.5. Lorentzkraften

Fra Laplaces lov kan vi slutte til kraften, *Lorentzkraften*, på den enkelte bevægede elektron.

Vi ser på en ledning hvori der går strømmen I . Det betyder at ledningselektronerne bevæger sig den modsatte vej med en hastighed vi kalder v .

Ledningen er anbragt vinkelret på magnetfeltet \vec{B} .



Δt vælges. $\Delta l = v\Delta t$ betragtes. Antallet af ledningselektroner i længden Δl kaldes Δn . Kraften ΔF herpå har størrelsen

$$\Delta F = I\Delta l B = \frac{e\Delta n}{\Delta t} v\Delta t B = e\Delta n v B$$

hvorfor kraften F på én elektron har størrelsen

$$F = e v B$$

Det er et specialtilfælde af *Lorentzkraften*

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (33)$$

som giver kraften på en ladning q der bevæger sig med hastigheden \vec{v} i det elektriske felt \vec{E} og det magnetiske felt \vec{B} .

Uden magnetfelt har vi det gammelkendte udtryk (3).

Uden elektrisk felt og med $\vec{v} \perp \vec{B}$ har vi situationen på figuren ovenfor idet det skal huskes at q er negativ for elektronerne.

Når $\vec{v} \perp \vec{B}$ giver krydsproduktet i (33) overensstemmelse med Laplaces lov (32).

Regningerne kan gennemføres baglæns. D.v.s. Vi kunne også have brugt $F = qvB$ når $\vec{v} \perp \vec{B}$ som grundlag for definition af B og deraf udledt Laplaces lov.

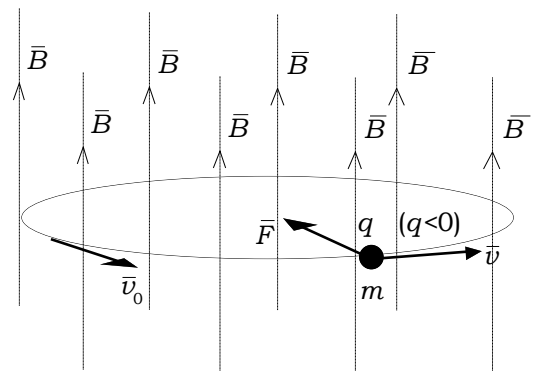
4.6. Ladet partikels bevægelse i homogent magnetfelt.

I 3.5. behandlede vi en ladet partikels bevægelse i et homogent elektrisk felt, altså specialtilfældet af (33) når $\vec{B} = \vec{0}$.

Nu behandler vi specialtilfældet hvor $\vec{E} = \vec{0}$ og \vec{B} er homogent. Vi har altså

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (34)$$

hvoraf ses at et B -felt ikke kan udføre noget arbejde på en ladet partikel idet kraftens effekt er $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$.



Vi tegner B -feltet lodret og starter partiklen i en vandret plan. Så kan følgende ræsonnementer gennemføres:

$$\vec{F} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{B} \Rightarrow \text{partiklen bliver i den vandrette plan}$$

Videre:

$$\begin{aligned} &\vec{F} \perp \vec{v} \\ \Rightarrow &E_{\text{kin}} \text{ er konstant} \wedge \vec{F} \perp \vec{v} \\ \Rightarrow &v \text{ er konstant} \wedge \vec{F} \perp \vec{v} \\ \Rightarrow &F \text{ er konstant} \wedge \vec{F} \perp \vec{v} \\ \Rightarrow &\text{bevægelsen er en jævn cirkelbevægelse.} \end{aligned}$$

I denne er centripetalkraftens størrelse $F = qvB$ så at Newtons 2. lov giver

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

hvoraf

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (35)$$

som altså er radius i cirkelbevægelsen af en ladet partikel i et homogent magnetfelt.

Hvis ikke $\bar{v}_0 \perp \bar{B}$ har vi

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \text{ og } \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

og

$$\frac{\bar{F}}{q} = \bar{v} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{pmatrix}$$

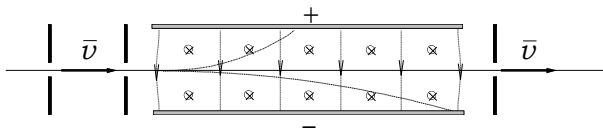
som viser at $a_z = 0$ hvorfor v_z er konstant. I xy -planen er stadig $\bar{F} \perp \bar{v}$. Bevægelsen er derfor en spiralkurve omkring en lodret akse.

Ladede partikler fra solen vil i nærheden af jorden indfanges af jordens magnetiske feltlinier og spiralerer langs disse hvorved de afbøjes fra jordens ækvatornære egne og ledes mod polerne hvor de giver anledning til flotte *nordlys* (-og sydllys, kaldet polarlys).

4.7. Hastighedsfilter

En kombination af et homogent elektrisk og et homogent magnetisk felt kan bruges til at filtrere ladede partikler efter deres hastighed idet den magnetiske kraft er hastighedsafhængig, mens det ikke er tilfældet for den elektriske.

Partiklerne med ladning q og hastighed v rettes ind i et område mellem to vandrette kapacitorplader og et vandret, homogent magnetfelt rettet vinkelret på partiklernes hastighed.



Symbolet \otimes betyder at magnetfeltet er rettet vinkelret ind i papiret (en pil der ses bagfra). Symbolet der viser den modsatte vej er \odot (en pil set mod spidsen).

Uanset ladningen vil den elektriske og den magnetiske kraft gå hver sin vej. De ophæver hinanden hvis

$$qE = qvB$$

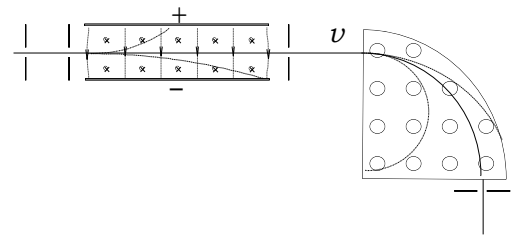
Ved at indstille felterne kan man altså sikre sig at de partikler der passerer alle tre spalter, har hastigheden

$$v = \frac{E}{B} \quad (36)$$

På figuren har jeg tegnet en opadgående cirkel som en positiv partikel vil følge hvis $E=0$ og en nedadgående parabel for det tilfælde hvor $B=0$.

Med begge felter forskellige fra nul vil en for hurtig positiv partikel afbøjes opad og en for langsom nedad.

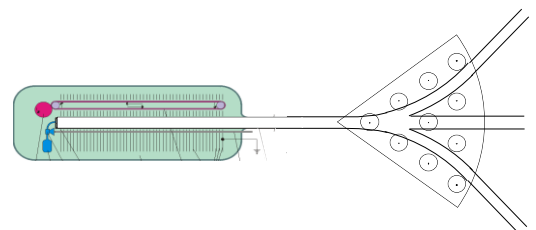
Ved at lade hastighedsfiltret følge af et magnetfelt kan man herefter sortere partiklerne efter ladning.



Det er ofte forekommende i forbindelse med acceleratoren at man får forskellige ladninger på de accelererede ioner.

Med den viste retning af magnetfeltet vil kun positive ioner passere. De har alle hastigheden v . Der er vist banen for en ladning som kan passere og banen for en med for lille ladning og banen for en med en al for stor ladning.

I har endvidere i Århus set hvorledes en magnet kan bruges som skifte-spør således at beamet fra en accelerator kan skiftes rundt mellem forskellige forsøgsopstillinger.



4.7.1. Enheder

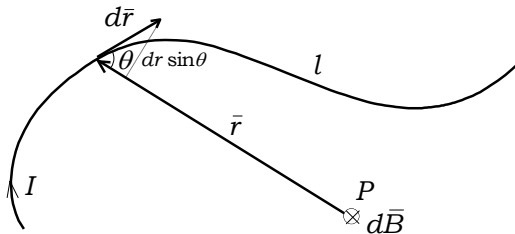
Ifølge (31) er SI-enheden for B

$$\frac{\text{N}}{\text{Am}} = \text{T} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

som også kaldes tesla, T. For magnetisk fluks findes enheden weber, Wb, som det fremgår af det sidste udtryk.

4.8. Biot og Savarts lov

Ørsteds forsøg viste at der var et magnetfelt omkring en strømførende ledning. Ved hjælp af *Biot og Savarts lov* kan man beregne dette magnetfelt.



I lederen l går strømmen I . Biot og Savarts lov siger så at det differentielle bidrag $d\vec{B}$ til magnetfeltet $\vec{B}(P)$ fra det differentielle lederelement $d\vec{r}$ er

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \times d\vec{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (37)$$

hvor μ_0 er en konstant kaldet *vakuumpermeabiliteten*.

I skal regnes positiv hvis strømmen løber i samme retning som $d\vec{r}$.

Bemærk at vi nu lader \vec{r} pege ud fra P mens vi ved Coulombs lov lod \vec{r} pege på P . Det skyldes at der må være overensstemmelse mellem \vec{r} og $d\vec{r}$.

Helst ville jeg have udledt hele molekylvitten af Maxwells ligninger, men jeg kan sgu ikke finde ud af at udlede denne. Selvom den må være indeholdt i hine!

Som begrundelse for Biot og Savarts lov kan dog vægtigt fremføres:

- ◆ Retningen af $d\vec{B}(P)$ er i overensstemmelse med Ørsteds forsøg.
- ◆ $dB \propto I$ og $dB \propto dr$. Disse sammenhænge er i overensstemmelse med superpositionsprincippet. To ledninger ved siden af hinanden hver med strømmen I må give det dobbelte felt. To små ens elementer $d\vec{r}$ efter hinanden må give det dobbelte felt.
- ◆ $B \propto r^{-2}$ Denne afhængighed af r kender vi fra Coulombs lov og fra Newtons gravitationslov. Den er ensbetydende med at feltlinierne med den betydning at feltlinietætheden er proportional med feltets størrelse kan

tegnes som kurver der ikke starter eller ender i det tomme rum.

$$\blacklozenge B \propto \sin\theta \quad \left(\left| \frac{\vec{r}}{r} \times d\vec{r} \right| = dr \sin\theta \right)$$

Denne faktor betyder at $d\vec{r}$ kun bidrager i den udstrækning hvormed den ses fra P , jf. tegningen.

Feltet $\vec{B}(P)$ i P findes så ved kurveintegralet

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3} \quad (38)$$

4.9. Gauss's teorem for magnetfelter

Vi har nu både elektrisk og magnetisk fluks. Vi indfører derfor betegnelserne $\Phi_E(F)$ og $\Phi_B(F)$ for den elektriske og den magnetiske fluks gennem fladen F .

Den magnetiske fluks gennem fladen F defineres i analogi med (6) ved

$$\Phi_B(F) = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (39)$$

Gauss's teorem for magnetfelter siger at

Fluksen gennem enhver lukket flade F er nul,

$$\Phi_B(F) = \oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Det betyder at *magnetiske feltlinier er lukkede kurver*.

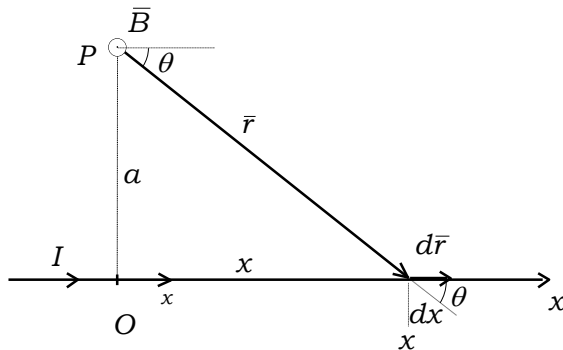
Og det betyder at der *ikke findes magnetiske monopoler*.

Magnetiske feltlinier som går ind i sydpolen på en permanent magnet, fortsætter altså inde i magneten og går ud igen af nordpolen.

Vi kan senere komme ind på hvorfra en permanent magnet får sin magnetisme.

Gauss's teoremer for hhv. elektriske og magnetiske felter er ækvivalente med *Maxwells første to ligninger*.

4.10. Magnetfeltet omkring en lang, lige leder



Af (38) finder vi B -feltet i punktet P i afstanden a fra en lang, lige leder med strømmen I .

Vi orienterer lederen som en x -akse i strømmens retning med origo ud for P .

Først indsættes ved hjælp af (37) at alle bidragene er parallelle og går vinkelret ud af papiret.

Vi får derfor

$$\begin{aligned} B(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{r^3} \sin\theta \, dx \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\theta}{r^2} \, dx \end{aligned}$$

med de tre indbyrdes afhængige variable x , θ , og r .

Der gælder

$$\sin\theta = \frac{a}{r} \quad \text{og} \quad \cot\theta = \frac{x}{a}$$

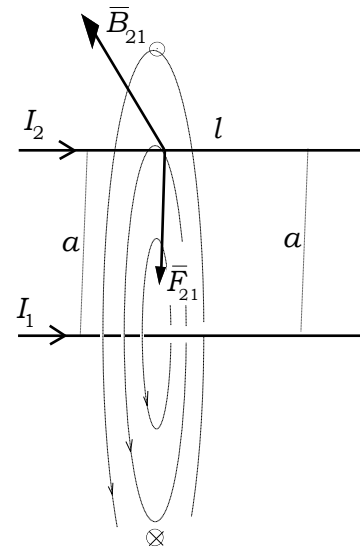
$\tan\theta$ er ikke defineret for $\theta=90^\circ$ ($x=0$) hvorfor det er smart at bruge \cot . Det giver substitutionen

$$x = a \cot\theta, \quad dx = \frac{-a}{\sin^2\theta} d\theta$$

hvoraf fås

$$\begin{aligned} B(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\pi}^0 \frac{\sin^3\theta}{a^2} \frac{-a}{\sin^2\theta} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [-\cos\theta]_0^\pi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \end{aligned} \quad (40)$$

4.11. Bestemmelse af μ_0



Vi kan nu udtrykke kraften mellem to parallelle ledere ved Laplaces lov og Biot og Savarts lov hvori μ_0 indgår. Da denne kraft også kan udtrykkes ved hjælp af definitionen på 1 A, kan vi få en bestemmelse af μ_0 .

Biot og Savarts lov giver

$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

for feltet på I_2 's plads fra I_1 hvorefter Laplaces lov giver

$$F_{21} = I_2 l B_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}$$

for kraften på længden l af den øverste ledning.

Med værdierne som skal bruges i forbindelse med definitionen af 1 A, fås

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m} = \frac{\mu_0 \text{ A}^2}{2\pi \text{ m}}$$

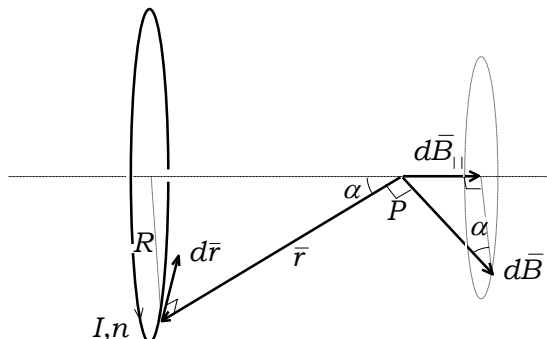
hvoraf

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad (41)$$

4.12. Magnetfeltet fra spoler

Vi skal se tre eksempler på udregning af magnetfelter fra spoler.

1. **En flad, cirkulær spole** med radius R , n vindinger og strømmen I .



Vi beregner \vec{B} i et punkt P på akse bestemt ved at spolens radius ses under vinklen α .

Af bidraget $d\vec{B}$ bliver kun $d\vec{B}_{\parallel}$ tilbage når der integreres over hele spolen. Der gælder

$$d\vec{B}_{\parallel} = dB \sin \alpha$$

og idet $d\vec{r} \perp \vec{r}$ gælder

$$|\vec{r} \times d\vec{r}| = r dr$$

Af

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3}$$

får vi derfor

$$dB_{\parallel} = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \sin \alpha dr$$

hvoraf

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \sin \alpha dr$$

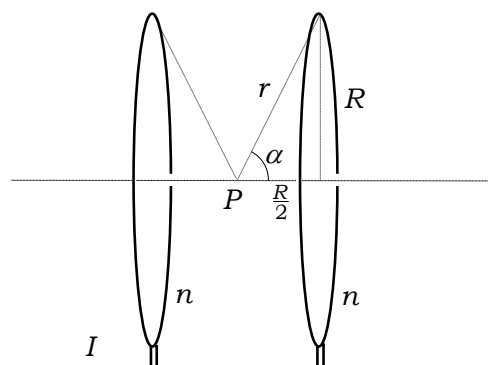
Alle faktorer i integranden er konstante. Og så skal vi n gange rundt for de n vindinger hvorfor vi får

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \sin \alpha 2\pi R n \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{In}{R} \sin^3 \alpha \end{aligned} \quad (42)$$

hvor r er fjernet gennem relationen $R = r \sin \alpha$.

Feltet fra en spole, kvalitativt.

2. Et **Helmholtz spolepar** er to af de netop behandlede spoler anbragt i en indbyrdes afstand som er lig med spoleradius.



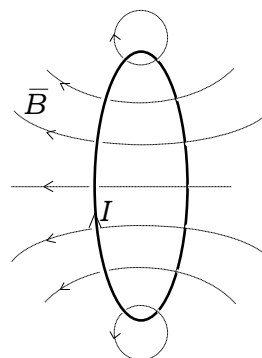
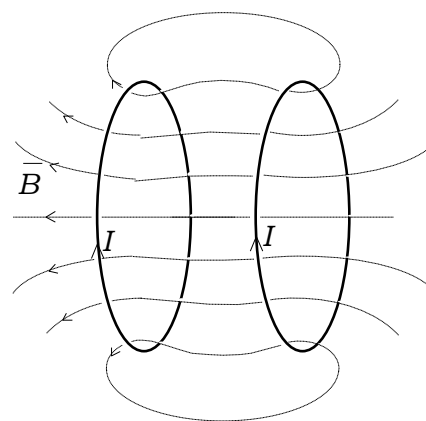
Anbragt således giver spolerne et med stor tilnærmelse homogent felt i et stort område omkring punktet P midt imellem spolerne.

Der gælder

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

De to spoler giver samme bidrag til feltet i P , altså i følge (22)

$$B(P) = 2 \frac{\mu_0}{2} \frac{In}{R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 In}{R} \frac{8}{5\sqrt{5}}$$



3. Endeligt beregnes B -feltet i et punkt P på akse af en **lang spole** med længde L , radius R og antallet af vindinger N .

Fra P ses spolens rande under vinklerne α_1 og α_2 .

Den del af spolen der ligger mellem x og $x+dx$ har $(N/L) dx$ vindinger. Ifølge beregningerne for 1. spoletype giver denne del bidraget

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{IN}{RL} \sin^3 \alpha dx$$

I stedet for at integrere fra x_1 til x_2 foretager vi substitutionen

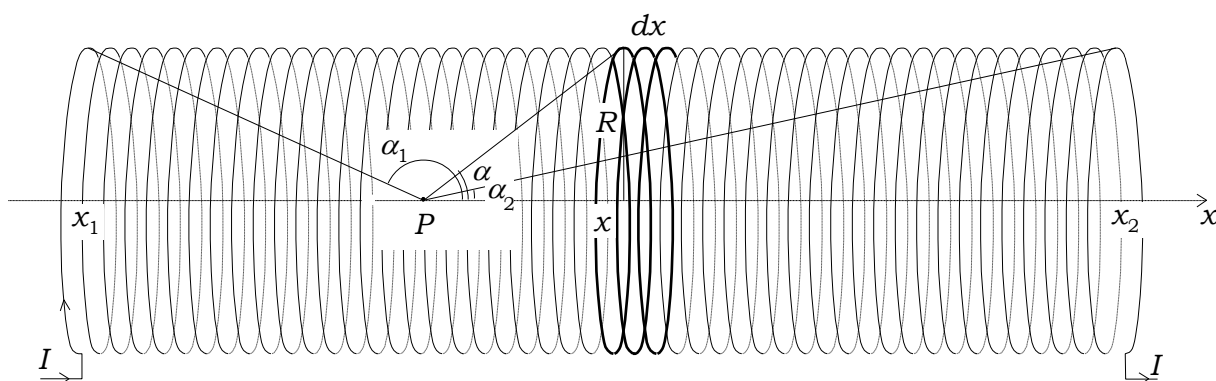
$$x = R \cot \alpha, \quad dx = \frac{-R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

og får

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{2} \frac{IN}{RL} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^3 \alpha \frac{-R}{\sin^2 \alpha} d\alpha \\ &= -\frac{\mu_0}{2} \frac{IN}{L} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{IN}{L} [\cos \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \end{aligned}$$

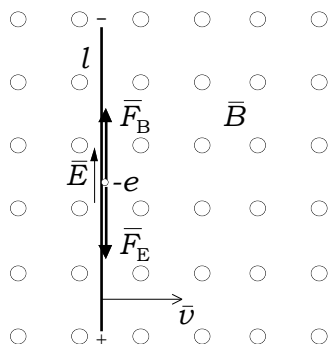
I grænsen $R \ll L$ og P langt fra spolens ender gælder $\alpha_1 \approx \pi$ og $\alpha_2 \approx 0$. I så fald er

$$B = \frac{\mu_0 IN}{L} \quad (43)$$



5. INDUKTION

Vi betragter først en stang af længden l anbragt vinkelret på det homogene magnetfelt \vec{B} . Stangen bevæges med hastigheden \vec{v} vinkelret på stangen og magnetfeltet.



Ledningselektronerne bevæger sig et lille stykke i stangen under kraften

$$\vec{F}_B = -e\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{her } F_B = e v B$$

indtil den opståede ladningsfordeling får dem til at gå i stå.

Som følge af denne ladningsfordeling er der i stangen et \vec{E} -felt som giver en kraft på elektronerne

$$\vec{F}_E = -e\vec{E} \quad , \quad F_E = eE$$

som ophæver $e v B$. Lorentzkraften $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ er nul.

Der gælder altså for enhver elektron i stangen

$$F_B = F_E \quad \Leftrightarrow \quad E = v B$$

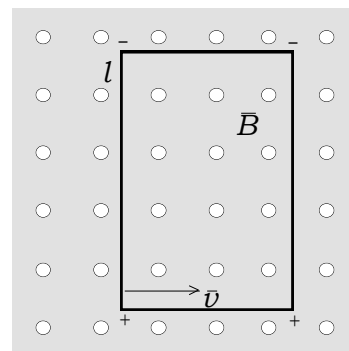
(hvilket jo naturligvis er hastighedsfeltet betingelsesligning (36).)

Spændingen mellem stangens ender er altså

$$\square = \int_{\text{stang}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = v B l \quad (43)$$

Spændingen siges at være opstået ved *induktion* og \square kaldes den *inducerede elektromotoriske kraft*. Den findes som spændingen mellem stangens ender når den ikke er del af et kredsløb.

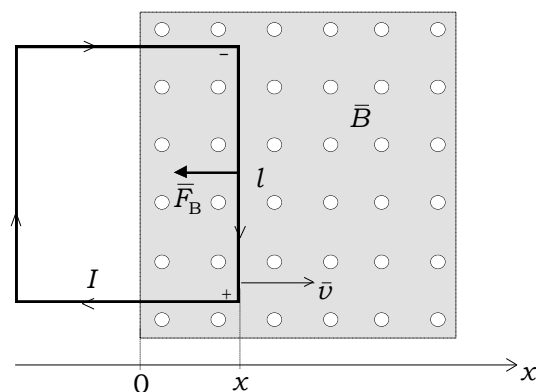
Vi går nu over til at se på ledninger i et *kredsløb* som helt eller delvis bevæger sig i et magnetfelt.



Hvis den tegnede ledningsramme bevæges i et *homogent* B -felt, vil der induceres samme spændinger i de to lodrette dele af kredsløbet, og i de to vandrette induceres ingen spændinger; der går ingen strøm. Det vil faktisk være tilfældet for et vilkårligt udformet, stift kredsløb i et homogent felt.

Hvis derimod feltet er *inhomogent* (herunder dele af kredsløbet ligger uden for feltet) eller hvis ikke alle delene af kredsløbet bevæger sig med samme hastighed, kan B -feltet inducere en elektromotorisk kraft som giver en strøm i kredsløbet.

F. eks.:



Magnetfeltet er homogent indenfor den stiplede linie. Udenfor er det nul.

Når der går en strøm, afsættes der energi i komponenter eller som her i ledningen hele vejen rundt. Det betyder at den inducerede elektromotoriske kraft ikke forekommer som en målbar spænding noget sted. (Det samme er tilfældet for galvaniske elementer.)

I den situation kan vi bruge den generelle definition af *elektromotorisk kraft i et kredsløb* (jf. (19))

$$\square = \frac{\Delta A}{\Delta q}$$

hvor ΔA er det af den elektromotoriske mekanisme (her induktion) udførte arbejde d.v.s. energitilskuddet når ladningen Δq har passeret et tværsnit af ledningen i kredsløbet.

Energibetragtninger forudsiger så at strømmen giver modstand mod bevægelsen. Lillefingerreglen eller (32) viser at dette er tilfældet.

Det ydre mekaniske arbejde går til kredsløbet via induktionskræfternes modstand. Altså gælder når det kvadratiske kredsløb er flyttet stykket Δx i løbet af tidsrummet Δt at

$$\Delta A = F_B \Delta x = I l B \Delta x$$

ifølge Laplaces lov (31).

Heraf følger at

$$\square = \frac{\Delta A}{\Delta q} = \frac{I l B \Delta x}{I \Delta t} = l B v$$

i overensstemmelse med (44).

Dette udtryk kan omskrives ved hjælp af (39)

$$\Phi_B(F) = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = B l x$$

hvor F er en vilkårlig flade med kredsløbet som randkurve. Hermed bliver

$$\square = l B v = \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (44)$$

hvor differentialkvotientudtrykket skal bruges hvis v ikke er konstant.

Vi kan også her formulere og indse *Lenz's lov*:

En induceret strøm vil have en sådan retning at det af strømmen frembragte magnetfelt modvirker den fluksændring som giver anledning til strømmen.

På tegningen s. 27 opstår strømmen fordi fluksen inden i kredsen vokser ud af papiret. Af strømmen I opstår derfor et magnetfeltet som indenfor kredsen er rettet ind i papiret.

Vi har uden at træde i det betraget forholdene under forudsætning af at magnetfeltet lå stille.

Nu skal det blive sjovt at træde idet: Hvad nu hvis vi fulgte med lednings-

rammen, og det var magnetfeltet der bevægede sig?

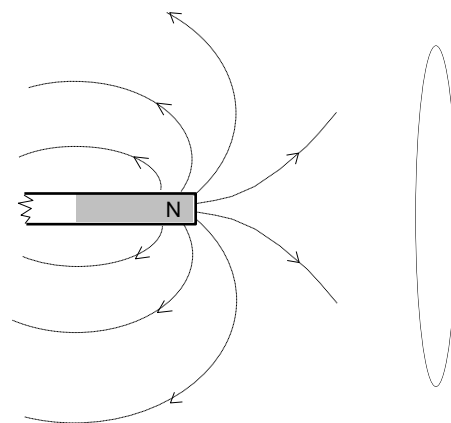
Det var jo Lorentzkræften som satte gang i det hele. Og den optræder kun hvis ladningerne bevæges, og nu er der ingen ladninger der bevæges!

Det var dette problem vedrørende bevægelse og referencesystem der drev Einstein frem til hans specielle relativitetsteori, 1905. I indledningen til den artikel hvori han offentliggør relativitetsteorien skriver han:

"Tag f.eks. den gensidige virkning af en magnet og en leder. Det observerbare fænomen afhænger her kun af den relative bevægelse af lederen og magneten, mens den sædvanlige synsmåde drager et skarp skel mellem de to tilfælde hvor enten det ene eller det andet af disse legemer bevæger sig."

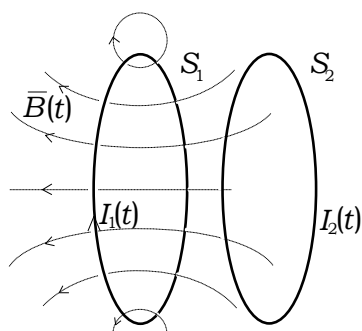
Formuleringen (45), kaldet *Faradays induktionslov*, er uafhængig af ståstedet. Det er den grundlæggende induktionslov og optræder som *Maxwells 3. ligning*.

Som kilde til E -felter er der altså ladninger som virker i overensstemmelse med Coulombs lov (4) og varierende magnetfelter som virker i overensstemmelse med Faradays induktionslov (45).



Føres magneten hen til ledningsløggen vil der i denne induceres en elektromotorisk kraft i overensstemmelse med (45), og der vil gå en strøm så længe den magnetiske fluks ændrer sig. (Her er det lige værd at indse at dette fænomen ligger gemt allerede i Ørstedts forsøg.)

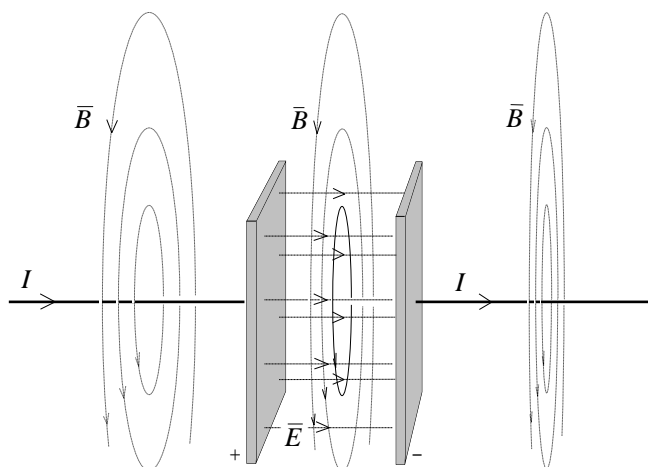
Nu kan den varierende magnetiske fluks imidlertid også frembringes af en vekselstrøm i en spole.



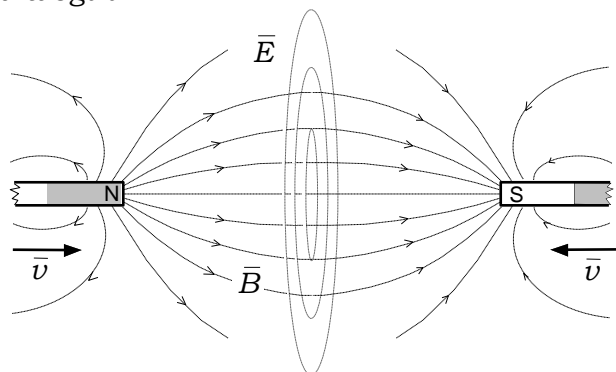
Vekselstrøm i S_1 vil give et varierende B -feltet gennem spole S_2 som vil inducere en vekselstrøm i S_2 . Dette er en kvalitativ forklaring på transformatoren. Den lukkede jernkerne gennem spolerne udnytter specielt jerns egenskaber og tjener til bedst muligt at føre de magnetiske feltlinier igennem spole 2.

Dette afsnit bør afrundes med indholdet af *Maxwells 4. ligning* som siger at B -felter ikke blot opstår omkring strømme i overensstemmelse med Biot og Savarts lov (37), men også som følge af varierende elektriske felter.

Sådan kan realiseres på følgende måde



analogt til



Imellem kapacitorpladerne er der ingen ladningstransport. Men der vokser et E -felt op. *Maxwells 4. ligning* siger at der omkring det tidsvarierende E -felt er et B -felt magen til det som strømmen ville have frembragt hvis den gik lige igennem. Man omtaler fænomenet som *forskydningsstrøm* gennem kapacitoren.

Analogien nedenunder må udføres ved at to magneter nærmer sig hinanden idet der ikke er magnetiske monopolladninger der kan strømme. Men opstillingen vil resultere i et variabelt B -felt som giver anledning til et E -felt som vist.

Hermed er vi fremme til forklaringen på hvorledes lys kan udbrede sig gennem det tomme rum. En første mistanke får man ved at udregne

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Det næste er at indse at hvis man et sted ændrer på det elektriske felt opstår i naboområder et magnetisk felt som ikke kan forsvinde uden at lave et elektrisk felt i sine naboområder. Det vil sige den oprindelige ændring forplanter sig gennem vekselvirkende elektriske og magnetiske felter.

En harmonisk bølgeligning med udbredeshastigheden $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ er løsning til Maxwells ligninger.

I den meget lange uenighed mellem Newton og Huygens og deres efterkommende tilhængere om hvorvidt lys var bølger eller partikler, var den væsentligste indvending over for bølgemodellen at den ikke kunne forklare at lyset kunne komme til os fra de fjerne stjerner. Denne vanskelighed førte til æterhypotesen som indførte en række nye vanskeligheder.

Med Maxwells beskrivelse forsvandt denne indvending som dug for solen. Men stort set samtidig med at lyshypotesen således stod uden de gamle vanskeligheder, blev det klart at lysets natur af andre grunde ikke kunne gøres til ren bølge.

Det var bare ærgerligt!
Og vidunderligt!

6. OPGAVER

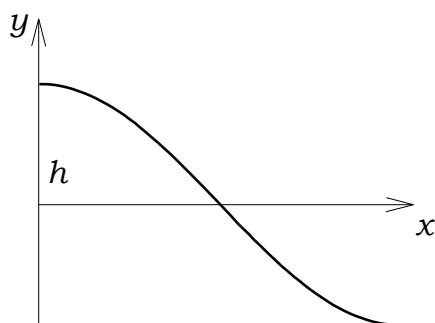
Opg. 1 Hvad er elektronernes hastighed i en kobberledning (én lednings-elektron pr. atom) med tværsnit 1 mm^2 strømmen 1 A ?

Opg. 2 Spids blyanten og skaf en lineal samt et ternet papir!

To numerisk lige store ladninger med modsat fortegn er anbragt i punkterne $(-4, 0)$ og $(4, 0)$.

Konstruer feltvektoren i punkterne $(-4, 2)$, $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(0, 4)$, $(-3, -2)$, $(3, -2)$, idet $E = 10/r^2$ for hver ladning hvor E og r måles i cm.

Opg. 3 En rutsjebane med højden h har form som en cosinusfunktion



Udregn tyngdekraftens arbejde når et legeme med masse m rutsjer ned ved at udregne integralet

$$A_k = \int_k \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

med

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{h}{2} \cos t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

(brug substitutionen $d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt$)

Opg. 4 Enheden eV kan opfattes som produktet af elementarladningen og spændingsenheden V.

Find en formel som berettiger hertil og beregn 1 eV i J.

Opg. 5 Find kraften som funktion af afstanden fra jordens centrum på et legeme der bevæger sig gennem et hul i jorden.

Vis derved at det vil udføre en harmonisk svingning og find perioden.

Find hastigheden ved jordens centrum.

Find et udtryk for den potentielle energi undervejs.

- og så står den på eksamensopgaver for resten.

7. STIKORDSREGISTER

- 1A;1;20;24;30
 Accelerator;22
 Afladning;16
 Arbejde;10;11;12;21;28;30
 Areal;4
 Begyndelsesbetingelse;16
 B-felter;18;29
 Billedrør;17
 Biot og Savarts lov;23;24;29
 Centralfelt;3;5;10;12;13
 Centralsymmetriske felter;10;11
 Coulombkraften;1
 Cylinderflade;9
 Det var bare vidunderligt;29
 Det var bare ærgerligt;29
 Dielektricitetskonstant;14
 Dielektriske materialer;14
 Differentialer;15
 Differentialligning;16
 Differentielle bidrag;2;4;5;9;20;23
 Dipolfelt;3;7
 Dæ var bære dejlig;29
 Einstein;18
 Elastikker;7
 Elektricitet;18
 Elektrisk felt;7;8;12;17;21;29
 Elektrisk ladning;1
 Elektriske kredsløb;14
 Elektromotorisk kraft;27;28
 Elektronkanonen;17
 Elektrostatisk energi;15
 Elektrostatisk mølle;8
 Elementarladningen;1;30
 Energi;10;12;13;15;17;27;30
 Enheder;1;4;13;14;20;22
 Enhedskugle;5
 E-vektor;6
 Faradays induktionslov;28
 Felt;1
 Feltbegrebet;2
 Feltlinier;3;4;5;6;7;14;18;19;22;23;29
 Feltlinier og -tæthed;4
 Feltstyrke;2
 Feltvektor;2
 Firkantspænding;16
 Fjernsyn;17
 Flad, cirkulær spole;25
 Fladeintegral;1
 Flader;4;12
 Fluks;4;6;7;22;23;28
 Flukstæthed;6
 Folkeskoleprincipper;13
 Forskydningsstrøm;14;29
 Fortegn;3;5;7;16;30
 Frit fald;17
 Gauss's teorem for elektriske felter;5
 Glødestrøm;17
 GM-rør;8
 Gravitationsanalogi;13
 Gravitationsfelt;2;11
 Gravitationspotentiale;13
 Grundenhed;1
 Hastighedsfilter;22
 Havet;13
 Helmholtz spolepar;25
 Hestekomagnet;19
 Homogent;9;13;14;17;19;21;22;25;27
 Homogent elektrisk felt;17;21
 Homogent magnetfelt;21;22
 Hul i jorden;13;30
 Huygens;29
 Højre hånd;19
 Inddeling;10
 Induceret elektromotorisk kraft;27
 Induceret strøm;28
 Induktion;18;27;28
 Inhomogent;27
 Jordens magnetiske feltlinier;22
 Jordoverfladen;13
 Jævn cirkelbevægelse;21
 Kant;7
 Kapacitans;14
 Kapacitor;14;15;16;29
 Konservative kraftfelter;11
 Kraft;1;19;22;24;27;28
 Kraftens effek;21
 Kredsløb;14;27;28
 Kugle;4;5;8;13
 Kurveintegral;1
 Kurveintegraler;1
 Ladet partikels bevægelse;17;21
 Ladning;1;2;5;6;7;8;9;11;12;14;15;16;
 17;20;21;22;30
 Ladningsstørrelse;1
 Ladningstæthed;9
 Lang spole;26
 Lang, lige leder;24
 Laplaces lov;20;21;24;28
 Leder;7;14;24
 Lederelementet;20
 Lederoverfladen;7
 Ledning;1;18;20;21;23;24
 Lillefingerreglen;19;20
 Lineær acceleration og afbøjning;17
 Lorentzkraften;21;27;28
 Lukkede kurver;23
 Lukket flade;5;7;23
 Lyshypotesen;29
 Magnetfelt;18;19;20;21;22;23;24;25;2
 7;28
 Magnetisk fluks;18;22;23
 Magnetisk induktion;18

Magnetisme;18;23
 Magnetnåle;19
 Massefordeling;13
 Maxwells 1. ligning;23
 Maxwells 2. ligning;23
 Maxwells 3. ligning;28
 Monopoler;18;23
 Newton;13;29
 Newtons 2. Lov;21
 Newtons 3. Lov;19;20
 Newtons gravitationslov;1;13;23
 Nord;18;19
 Nordlys;22
 Normal;4
 Opgaver;30;31
 Opladning;16
 Orienterede kurver;3
 Oscilloskop;16;17
 Overflade;7;13
 Parabel;17;22
 Parallel;9;15
 Parallelforbinding;15
 Parallele strømme;19
 Parameterfremstilling;10
 Permanent magnet;23
 Pladeareal;14
 Plader;14;17
 Polariserbare stoffer;14
 Potentiale;12;13
 Potentiel energi;12;15
 Prikprodukt;12
 Projektion;4;6
 Prøvemagnet;18
 Punktladning;2
 Randvirkning;14
 Referencesystem;18;28
 Samlede ladning;5;6;15
 Serieforbinding;15
 Skiftespor;22
 Solen;22;29
 Specielle relativitetsteori;18;28
 Spole;25;26;28;29
 Spænding;12
 Stangmagnet;18
 Stedvektor;2
 Stjerner;29
 Strøm;1;12;14;16;19;20;27;28
 Strømenhed;19
 Strømførende ledning;20;23
 Substitution;5;9;10;11;24;26;30
 Syd;18;19
 Tesla;22
 Tid;1;2;17;18;20;28
 Tommelfingerreglen;19
 Tonegenerator;16
 Tværsnit;1;20;28;30
 Tyngdeaccelerationen;13
 Uafhængig;9;11
 Vacuumpermittiviteten;5;14
 Vakuu;14;20
 Vakuumpermeabiliteten;23
 Van der graf-generator;8
 Vekselstrøm;14;28;29
 Vektorfunktion;2;10
 Vindinger;25;26
 Vinkelret;4;6;7;9;12;19;21;22;24;27
 Weber;22
 Ækvipotentialflader;12
 Æterhypotesen;29
 Ørsted;18;19;23;28
 Århus;22