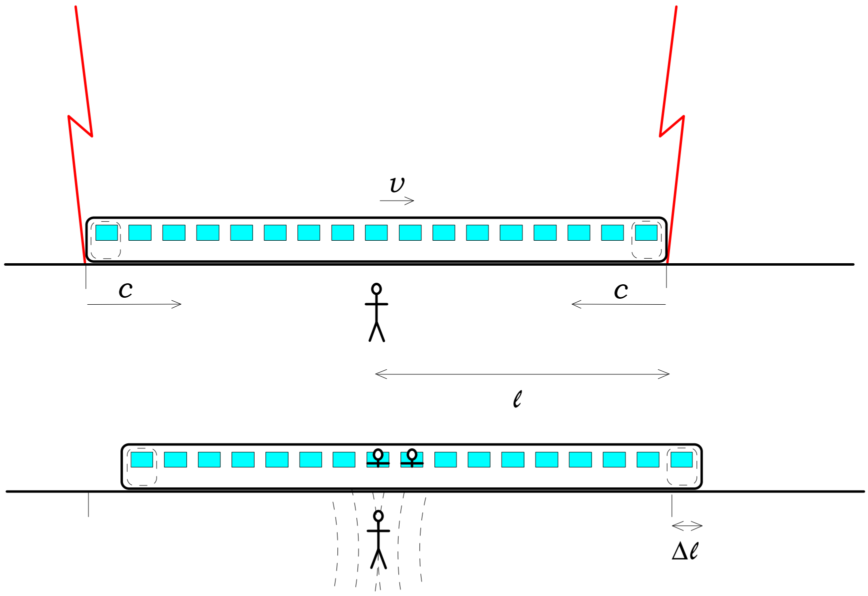
Einsteins tog



og hvad deraf følger

SelvTryk
claus@munchow.net - http://claus.munchow.net

Einsteins tog 1

EINSTEINS TOG

1. Indledning

I den specielle relativitetsteori fra 1905 indfører Einstein nogle meget overraskende korrektioner til vores normale opfattelse af rum og tid.

Ledetråden for ham var <u>modsigelser</u> mellem to hver for sig meget succesfulde beskrivelser af dele af den fysiske virkelighed, den klassiske mekanik og elektrodynamikken.

Gennembruddet for den klassiske mekanik fandt sted fra midten af 1500-tallet til 1687 hvor Newton samlede den nye forståelsesmåde i Principia.

Den nye elektrodynamiske forståelse blev indledt med H. C. Ørsteds opdagelse i 1820 og fandt sin afklaring med Maxwells ligninger allerede i 1860'erne. Elektrodynamikken kan rummes på en lige så kort form som Newtons dynamik, (for vakuum):

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{E} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\
\mathrm{div}\boldsymbol{B} &= 0 \\
\mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\mathrm{rot}\boldsymbol{B} &= \mu_0\,\boldsymbol{i} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

som man her blot kan sidde og nyde. Værsgod!

Det siger sig selv at når først modsigelsen er opdaget, må der arbejdes med den til den er hævet.

Modsigelsen hænger nøje sammen med spørgsmålet om lysets hastighed. Og selv om det ikke direkte var Einsteins indfaldsvinkel, vil vi her gribe det sådan an.

2. Lysets hastighed

Når et signal sendes fra et sted til et andet, har det en hastighed hvis det ikke er øjeblikkeligt. Fænomener med øjeblikkelig udbredelse kendes ikke, og når vi specielt tænker på lyset så målte Ole Rømer jo allerede i 1676 "lysets tøven".

Bevægelseshastigheden for et signal af en eller anden art kan måles i forhold til

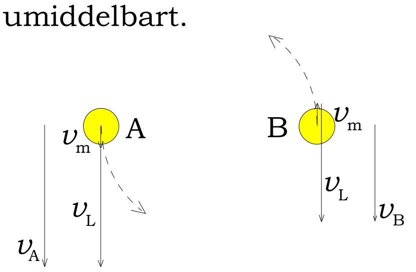
1. afsenderen
2. et signaltransporterende medium
3. modtageren.

Og når vi siger at lysets hastighed er $3\cdot10^8\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$, hvad skal så denne hastighed måles i forhold til?

Ad 1. Dette tilfælde svarer til projektiler fra et gevær. Og dermed er det i fin overensstemmelse med Newtons forestilling om lys som partikler. Og selv om denne forestilling måtte forlades da man opdagede lysets interferens (jf. Youngs dobbeltspalteforsøg), kunne lyshastighed i forhold til afsenderen naturligvis tænkes.

Men den kan let afvises ved analyser af dobbeltstjerner.

Dobbeltstjerner er stjerner som kredser omkring et fælles tyngdepunkt. Når de betragtes (i store kikkerter), ses de umiddelbart at kredse omkring i fuld overensstemmelse med Newtons love. Hvis det lys som stjernerne sendte ned til os, blev afsendt med hastigheden $3\cdot10^8\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ i forhold til stjernerne, ville deres rotation omkring hinanden slet ikke kunne iagttages umiddelbart.



v_{m} er medføringshastigheden, v_{L} er lyshastigheden i forhold til afsenderen, og v_{A} og v_{B} er lyshastigheden i forhold til modtageren.

Lyset fra A bevæger sig hurtigere ned mod os fordi A er på vej mod os, end lyset fra B som er på vej væk. Skønt udsendt samtidigt ankommer det ikke samtidigt til os.

Hvis det var tilfældet, ville stjernernes positioner slet ikke kunne ses umiddelbart.

Når B f.eks. senere er på A's viste position, vil dens lys kunne indhente det lys som den sendte af sted på tegningen, og B vil ses to steder samtidigt. Eller det kan overhale det tidligere udsendte, og der vendes helt op og ned på det der ses.

Ad 2. I denne mulighed ligner lyset lyden hvis hastighed (340 $^{m}/_{s}$) skal måles i forhold til luften. Denne mulighed er i overensstemmelse med Huygens' opfattelse af lyset som bølger.

Men der *er* ikke noget ude i verdensrummet!

Imidlertid var det den herskende opfattelse i slutningen af forrige århundrede at denne mulighed var den mest tilfredsstillende. Man forestillede sig derfor et medium, *æteren*, som var til stede overalt i verdensrummet. Lyset udbredte sig så som svingninger i æteren, og lyset havde en bestemt hastighed målt i forhold til æteren ligesom lyden har en bestemt hastighed målt i forhold til luften.

Men så var det jo spændende at måle hvor hurtigt jorden bevægede sig i forhold til æteren.

To fysikere, Michelson og Moreley, er blevet berømte for deres stædige forsøg over en 30-årig periode på at måle "ætervindens hastighed".

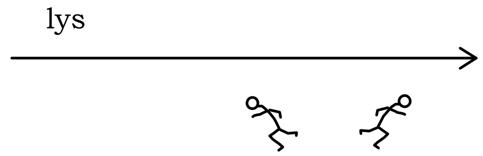
De målte lysudbredelseshastigheden i to på hinanden vinkelrette retninger. Hvis den ene retning havde sidevind, ville den anden retning have enten modvind eller medvind, og en forskel ville kunne måles.

I takt med deres skuffelser over ikke at finde nogen effekt steg deres anstrengelser til uanede højder (det blev gennemført højt oppe på et bjerg fordi jordoverfladen formodedes at trække æteren med sig) og vanvittige omkostninger (det blev gennemført med hele apparatet sejlende på kviksølv fordi de troede at rystelser kunne have forstyrret eksperimentet.)

Der var ikke noget at komme efter - hvilket Einstein i øvrigt ikke et øjeblik var i tvivl om. Han var helt uinteresseret i M&M's anstrengelser.

Og ærlig talt. Kan du lide ideen om en æter overalt i verdensrummet?

Ad 3. Hvis lysets hastighed skal måles i forhold til modtageren, vil det løse den i indledningen omtalte modsigelse. Og det var Einsteins begrundelse for at vælge denne mulighed. Men det betyder jo så at to modtagere af samme lyssignal der bevæger sig i forhold til hinanden, vil måle samme hastighed for dette lyssignal.



Det er jo ikke umiddelbart rart.

Men hva' så?

Et valg må træffes. Og vi skal nu se hvad mulighed 3 medfører.

Einstein præsenterede selv sine overvejelser i forbindelse med et hurtigtkørende tog hvori to lyn slår ned. Et lyntog tør man formode.

For os er et kvalitativt argument rigeligt til at blive alvorligt rystet.

Men det bliver klarere hvis vi først gennemfører en kvantitativ analyse af forholdene i tilfælde af *lyd*udsendelse.

3. Einsteins tog og lyd

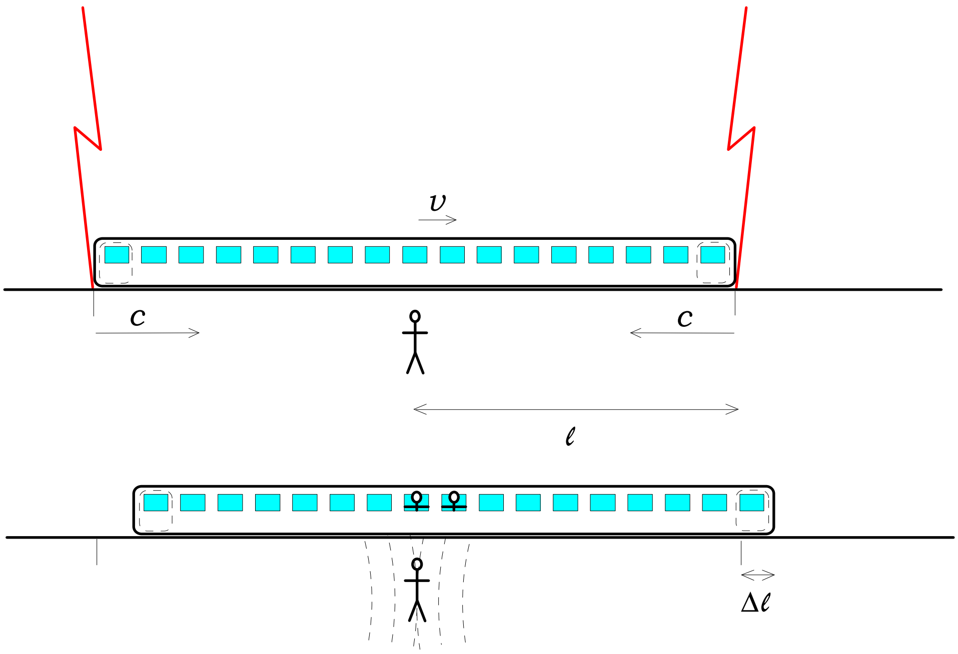
På næste side ses et tog som kører forbi en perron med en hastighed på v.

Pludseligt slår to lyn ned, et i forenden og et i bagenden af toget og sætter mærker på skinnerne (øverste tegning).

Manden på perronen hører *lyden* fra de to lynnedslag samtidigt (nederste tegning) og ser bagefter at han stod midt imellem mærkerne.

Da det den pågældende dag var vindstille, slutter han at de to lynnedslag var samtidige.

(Hvis det havde blæst i samme retning som toget kører, ville manden have ræsonneret: "Jeg hørte lydene samtidigt, men da lyden fra bagenden bliver ført med vinden, og lyden fra forenden skal bevæge sig imod vinden, må lyden fra forenden have været længere tid undervejs, og det forreste lyn må have slået først ned.)



Når lydene fra de to lynnedslag rammer manden på perronen, er toget kørt et lille stykke (nederst).

Manden som læner sig ud af det midterste vindue (Det må han ikke! men det ser vi bort fra), hører derfor lyden fra forenden før lyden fra bagenden. (Lyden fra forenden har passeret ham, lyden fra bagenden er ikke kommet endnu). Men han ved at toget kører lyden fra forenden i møde og er ikke sikker på om det forreste lyn slog ned først.

Lydene fra de to ender af toget når hinanden ud for manden på perronen og derfor også ud for en personen i toget *bag* midtervinduet.

Han hører lydene samtidigt, ved at der er længere hen til forenden, men ved også at toget kører lyden i møde, og han tør heller ikke afgøre rækkefølgen af lynnedslagene.

Manden på perronen tager papir og blyant op af lommen og begynder at skrive. Vi kigger ham over skuldrene.

Han vælger følgende betegnelser:

c: lydens hastighed i forhold til luften og dermed perronen

v: togets hastighed i forhold til perronen og luften (vindstille)

ℓ: halvdelen af togets længde

$\Delta\ell$: det stykke toget kører fra lynene slår ned til han hører dem

Δt: den tid, det tager toget at køre stykket $\Delta\ell$.

Han tænker lidt og skriver så

$$\Delta\ell = v\Delta t, \quad \text{hvor } \Delta t = \ell/c.$$

Så tager han sin mobiltelefon og ringer til den bagerste vinduesmand i toget og siger “Nu skal jeg fortælle dig hvor du stod da du hørte lynene.” (Hvad sagde han om stedet?)

“Tak” siger den bagerste vinduesmand, “så kan jeg regne ud om lynene var samtidige”.

Han regner (vi lurer stadig):

$$\Delta t_f = \frac{\ell + \Delta\ell}{c+v} = \frac{c\Delta t + v\Delta t}{c+v} = \Delta t$$

$$\Delta t_b = \frac{\ell - \Delta\ell}{c-v} = \frac{c\Delta t - v\Delta t}{c-v} = \Delta t$$

“Aha” siger han så. “De *var* samtidige”.

Hvad var det egentligt han regnede ud?

Hvor lang tid er der mellem lydene for den midterste vinduesmand?

4. Einsteins tog og lys

På foregående side ses et tog som kører forbi en perron med en hastighed på v.

Pludseligt slår to lyn ned, et i forenden og et i bagenden af toget og sætter mærker på skinnerne (øverste tegning).

Manden på perronen ser *lyset* fra de to lynnedslag samtidigt (nederste tegning) og ser bagefter at han stod midt imellem mærkerne. Da lysets hastighed er den samme i alle retninger, slutter han at de *to lynnedslag var samtidige*.

Når lysglimtene fra de to lynnedslag rammer manden på perronen, er toget kørt et lille stykke (nederst, men nu skal toget virkeligt køre stærkt).

Lysglimtene når hinanden ud for manden på perronen og derfor også ud for en personen i toget som må stå *bag* midten af toget.

5. Samtidighedens relativitet

Manden i toget ser lysglimtene samtidigt og ved at der er længere hen til forenden end til bagenden.

Og da lyset bevæger sig lige hurtigt i alle retninger, slutter han at *lynet i forenden slog ned først*.

Manden på perronen og manden i toget er altså uenige om samtidigheden af de to lynnedslag.

6. Længdens relativitet, kvalitativt

Manden i toget vil derfor også mene at det forreste mærke på skinnerne blev sat først.

Manden på perronen for hvem de to lynnedslag var samtidige, tager nu en målestok og måler afstanden mellem mærkerne efter lynnedslagene.

"Så, nu ved jeg hvor langt toget er", siger han.

Imidlertid har han glemt at slukke for mobiltelefonen, så bemærkningen opsnappes af manden i toget som griner lidt for sig selv og siger: "Det ser måske sådan ud for ham, men toget kørte jo lidt i tidsrummet fra det forreste lynnedslag til det bagerste, så afstanden mellem mærkerne er for lille. Men det *ser* jo sådan ud for ham. Han *ser* toget forkortet".

I vore overvejelser indgår der ikke andet end tog og perron. Der er fuldstændig symmetri mellem de to positioner, og når toget bevæger sig med hastigheden v i forhold til perronen, må også perronen bevæge sig med hastighed v i forhold til toget.

Hvis man vil gennemføre argumenterne med ombyttede roller for de to iagttagere, skal man huske at også forende og bagende får skiftet betydning. Perronen vil så optræde forkortet for togpassageren.

En iagttager der følger med genstanden, måler *egenlængden* eller *hvilelængden* af denne. En iagttager der bevæger sig i forhold til genstanden, vil se den forkortet, den *relativistiske* længde.

Dette gælder længder parallelle med den relative bevægelse.

Togpersonale og perronpersonale vil derimod være enige om længder vinkelret på den relative hastighed, f. eks. afstanden mellem skinnerne.

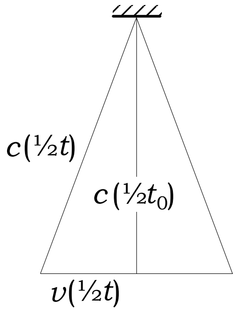
Vi antager at to lyn slår ned i de to forreste hjul. Vi antager videre at togføreren sidder midt i toget og ser lynene samtidigt. Han slutter så at de slog ned samtidigt.

Det betyder videre at de to lyssignaler mødes et sted midt imellem forhjulene. En perroniagttager som placerer sig der (liggende, for Guds skyld!) vil se lynene samtidigt, og da han ligger midt mellem skinnerne, slutter han også at lynene var samtidige.

Da det var samtidighedens relativitet på langs af toget som lå bag vores kvalitative forståelse af længdens relativitet, slutter vi heraf at for længder vinkelret på den relative bevægelse er der ingen relativitetseffekter.

7. Tidens relativitet, kvantitativt

Manden i toget havde faktisk et lille eksperiment for da toget passerede perronen. Han sendte et lysglimt fra gulvet lodret op til et spejl i loftet og tilbage igen. Han målte tidsrummet t_0 mellem udsendelse og ankomst i samme punkt på gulvet i toget.



Manden på perronen kiggede nysgerrigt på dette eksperiment og målte tidsrummet til t.

Mens det foregik bevægede toget sig et stykke langs perronen og perronmanden så lyssignalet bevæge sig efter hypotenuserne i trekanterne. Lyset afgår fra og ankommer til to forskellige punkter på perronen.

Heraf følger

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (ct_0)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad t_0 = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{1}$$

Egentiden **t_0 mellem to begivenheder målt i hvile er kortere end den relativistiske tid mellem de samme begivenheder målt af en iagttager i bevægelse.**

"Egentid" og "i hvile" betyder at de to begivenheder finder sted i samme punkt (her et punkt på gulvet i toget).

t_0 for egentiden er konsekvent i forhold til kommende betegnelser (l_0, m_0, m.m.). Der er dog tradition for at bruge τ for egentiden og angive tidsintervaller. I så fald gælder

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{1'}$$

8. Længdens relativitet, kvantitativt

Manden på perronen tænder lunten på en bombe i det øjeblik forenden af lyntoget passerer ham.

Bomben springer i det øjeblik bagenden passerer ham.

Dette er to begivenheder i samme punkt set fra *perronen*. (Bomben kan undværes, men understreger "to begivenheder i samme punkt" - og sætter lidt kolorit på situationen.) Tiden imellem dem er egentiden t_0. Imens passerer toget som for perronmanden har den relativistiske længde l. Der gælder altså

$$l = v\,t_0.$$

De samme begivenheder set fra *toget* afspiller sig i løbet af den relativistiske tid t idet bomben passerer forbi med hastigheden v. Toget bevæger sig imens hvilelængden l_0.

Der gælder altså

$$l_0 = v\,t.$$

Ifølge s.4 gælder

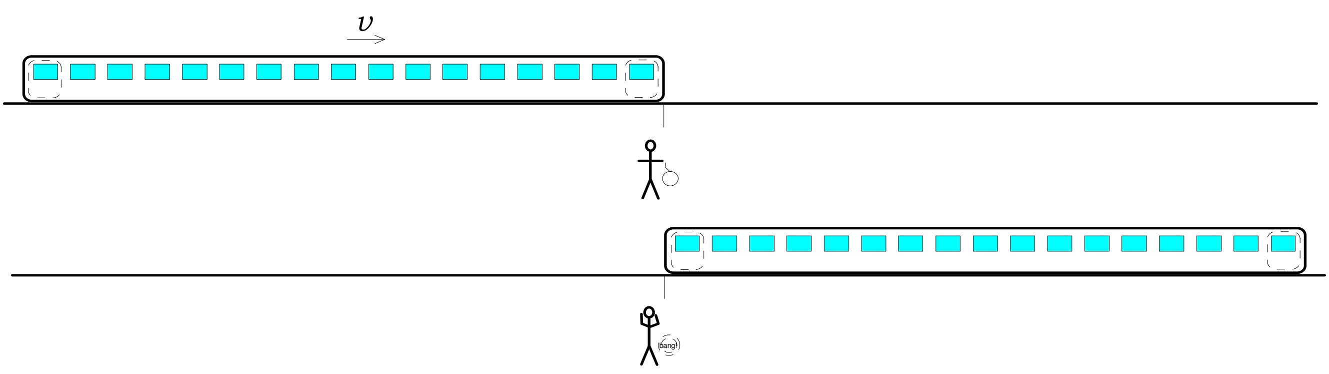
$$\frac{l}{l_0} = \frac{t_0}{t} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

eller

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{2}$$

Det siger sig selv at når disse for kinematikken helt fundamentale begreber relativeres, så må det have store konsekvenser for andre dele af kinematikken og for hele mekanikken som jo bygger herpå.

Vi drager i det følgende først nogle konsekvenser inden for kinematikken, kapitel 9-12, hvorefter vi i kapitel 13 kigger lidt på den nye dynamik.



9. Klassisk dopplereffekt, lyd

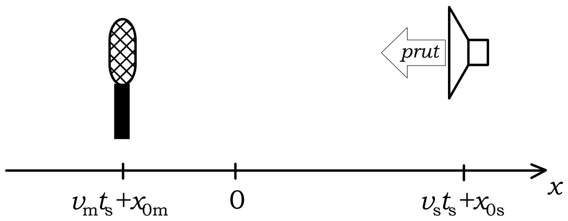
Vi starter med en beskrivelse af lyd i luft. Beskrivelsen foretages fra et koordinatsystem som ligger stille i luften. Lydhastigheden kaldes c og er altså ens i alle retninger.

En lyd**s**ender og en lyd**m**odtager bevæger sig på en x-akse. Deres positioner er

$$x_s = v_s t + x_{0s} \quad \text{og} \quad x_m = v_m t + x_{0m}$$

hvor altså v_s er lydsenderens og v_m er lydmodtagerens hastigheder og x_{0s} og x_{0m} er begyndelsesstederne.

En lyd udsendt til tidspunktet t_s modtages til tidspunktet t_m.



Så længe senderen er til højre for modtageren, gælder uanset fortegn af v_s og v_m og med $\Delta x_0 = x_{0s} - x_{0m}$ at

$$v_s t_s + x_{0s} - (v_m t_m + x_{0m}) = c(t_m - t_s)$$

$$\Leftrightarrow \quad v_s t_s + c t_s + \Delta x_0 = v_m t_m + c t_m$$

$$\Leftrightarrow \quad (v_s + c) t_s + \Delta x_0 = (v_m + c) t_m$$

$$\Leftrightarrow \quad t_m = \frac{c + v_s}{c + v_m} t_s + \frac{\Delta x_0}{c + v_m}.$$

(Denne formel bør efterprøves for $v_s = v_m = 0$, for $v_s = -c$, for $\Delta x_0 = 0$ og hvad man ellers kan finde på.)

De to brøker er konstanter. Af den lineære sammenhæng findes

$$\Delta t_m = \frac{c + v_s}{c + v_m} \Delta t_s \tag{3}$$

for tidsforskellen mellem to på hinanden følgende prutter.

Hvis den udsendte lyd er en harmonisk tone, vil der for den udsendte periode T_s og den modtagede periode T_m gælde

$$T_m = \frac{c + v_s}{c + v_m} T_s \tag{4}$$

og for frekvenserne ($\nu = {}^1/_T$)

$$\nu_m = \frac{c + v_m}{c + v_s} \nu_s = \frac{c + v_m + v_s - v_s}{c + v_s} \nu_s$$

$$= (1 + \frac{v_m - v_s}{c + v_s}) \nu_s = (1 - \frac{\Delta v}{c + v_s}) \nu_s \tag{5}$$

hvor Δv er den relative hastighed

$$\Delta v = v_s - v_m. \tag{6}$$

Ifald $v_s \ll c$ gælder

$$\nu_m = (1 - \frac{\Delta v}{c}) \nu_s. \tag{7}$$

Det ses at når den relative afstand vokser ($\Delta v > 0$), vil modtageren høre en sænket frekvens (og omvendt) - i overensstemmelse med oplevelser med ambulancer!

Det ses også at der i den eksakte sammenhæng indgår alle tre hastigheder på forskellig måde.

10. Klassisk dopplereffekt, lys

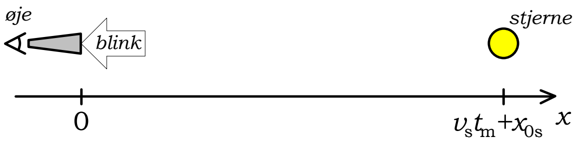
Den foregående beskrivelse kan også anvendes på lys. Nu er det tilmed ligegyldigt hvor vi stiller os; betingelsen, at udbredelseshastigheden er ens i alle retninger, vil være opfyldt. Tegningerne til tidspunkterne t_s og t_m er i samme koordinatsystem, vort ståsted. Alle formlerne gælder.

T_s og T_m er så perioderne og ν_s og ν_m frekvenserne hos sender og modtager som de ser ud for os.

Men vi kan ikke udtale os om perioderne og frekvenserne for iagttagere i hvile i forhold til lyssenderen og lysmodtageren. De har jo deres egen egentid.

Dette problem behandles i næste afsnit.

11. Relativistisk dopplereffekt



Vi opfatter os som lysmodtagere og lægger altså koordinatsystemet med nulpunkt ved modtageren, d.v.s. $v_m = 0$ og $x_{om} = 0$. Vi sætter $v_s = v$ hvilket er i overensstemmelse med betydningen af v, den relative hastighed, i afsnittene 4 -10.

Set ud fra dette koordinatsystem giver (3) idet c er lyshastigheden

$$\Delta t_m = (1 + {}^{v}\!/_{c})\Delta t_s. \qquad (8)$$

For lyssenderen er varigheden $\Delta\tau_s$ i egentiden mellem to udsendelser knyttet sammen med varigheden Δt_s set af os ved (1')

$$\Delta\tau_s = \Delta t_s \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

hvoraf

$$\Delta t_m = \frac{1 + {}^{v}\!/_{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\Delta\tau_s = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,\Delta\tau_s.$$

For frekvenserne oplevet af senderen og modtageren får vi altså

$$\nu_m = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,\nu_s. \qquad (9)$$

Hvis $v > 0$ er den modtagede frekvens mindre end den udsendte.

Når vi iagttager fjerne stjerner eller galakser, ses en rødforskydning af spektrallinierne. Denne rødforskydning har været en afgørende faktor i beskrivelsen af universets udvidelse.

Idet λ er den iagttagede bølgelængde og λ_0 er den tilsvarende fra laboratorieforsøg kendte, angives rødforskydningen ved

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{\nu_0}{\nu} - 1$$

$$= \frac{\nu_s}{\nu_m} - 1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 \qquad (10)$$

$$= \frac{1 + {}^{v}\!/_{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \approx {}^{v}\!/_{c} \qquad (11)$$

når $v \ll c$.

12. Hubbles lov

Hubble viste i 1929 at galaksernes rødforskydning er proportional med deres afstand R til os. Hubbles lov skrives på formen

$$z = \frac{H_0}{c} R \qquad (12)$$

som med udledningen ovenfor kan skrives

$$v = H_0 R. \qquad (13)$$

H_0 har værdien

$$H_0 = 20\,\mathrm{km/s}/10^6\,\text{lysår}. \qquad (14)$$

At v således er proportional med afstanden, betyder at hvis man lader tiden gå baglæns, vil alle galakser, d.v.s. hele universet, samles i et punkt, en begivenhed, THE BIG BANG.

Vi kan vurdere tiden fra big bang. Vi vælger en galakse i afstanden R_0 med undvigelseshastigheden v_0 hvor så $v_0 = H_0 R_0$.

Hvis dens bevægelse foregår med konstant fart gælder at afstanden r er givet ved

$$r = v_0 t + R_0 = H_0 R_0 t + R_0$$
$$= R_0 (H_0 t + 1)$$

således at $r = 0$ til $t = -H_0^{-1}$ = ca. 15 milliarder år. (Og prøv så lige den!)

Der er tale om en øvre grænse fordi ekspansionen nedbremses med tiden og har således været hurtigere i den af beregningen omfattede periode.

13. Relativistisk hastighedsaddition

Vi indfører en kort betegnelse for en faktor

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{15}$$

som optræder så ofte.

Jeg stiller mig i et vilkårligt initialsystem og iagttager perioderne T_s og T_m. Jeg finder sammenhængen (4).

For perioderne τ_s og τ_m målt i egentiden for sender og modtager har vi i følge (1)

$$T_s = \gamma(v_s)\,\tau_s \text{ og } T_m = \gamma(v_m)\,\tau_m.$$

Indsættes dette i (4) fås

$$\gamma(v_m)\,\tau_m = \frac{c+v_s}{c+v_m}\,\gamma(v_s)\,\tau_s. \tag{16}$$

Hvis man placerer sig i et andet inertialsystem, ændres c ikke, men nok v_s og v_m.

Vores placering kan imidlertid ikke spille nogen rolle for de perioder sender og modtager oplever. Det eneste der kan spille en rolle for sammenhængen (16), er den relative hastighed.

Hvis I stiller jer hos modtageren, har I $v_m = 0$ og $v_s = v$ hvor så v er den relative hastighed.

Hermed bliver (16) for jer til

$$\tau_m = \frac{c+v}{c}\,\gamma(v)\,\tau_s \tag{16'}$$

som altså er den samme sammenhæng som min (16). Heraf fås

$$\frac{c+v_s}{c+v_m}\,\frac{\gamma(v_s)}{\gamma(v_m)} = \frac{c+v}{c}\,\gamma(v).$$

For kortheds skyld sættes $v_s = s$ og $v_m = m$. Regningerne fortsætter (-og fortsætter!)

$$\frac{c+s}{c+m}\,\frac{\sqrt{1-\frac{m^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{s^2}{c^2}}} = \frac{c+v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(c+s)^2}{(c+m)^2}\,\frac{c^2-m^2}{c^2-s^2} = \frac{(c+v)^2}{c^2-v^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c+s}{c+m}\,\frac{c-m}{c-s} = \frac{c+v}{c-v}$$

$$\Leftrightarrow (c-s)(c+m)(c+v) = (c+s)(c-m)(c-v)$$

$$\Leftrightarrow c\,(c+m)(c+v) - s\,(c+m)(c+v) = c\,(c-m)(c-v) + s\,(c-m)(c-v)$$

$$\Leftrightarrow c\,((c+m)(c+v)-(c-m)(c-v)) = s\,((c-m)(c-v)+(c+m)(c+v))$$

$$\Leftrightarrow c\,(2cv+2\,mc) = s\,(2c^2+2\,mv)$$

$$\Leftrightarrow s = c\,\frac{cv+mc}{c^2+mv} = \frac{v+m}{1+\frac{mv}{c^2}}$$

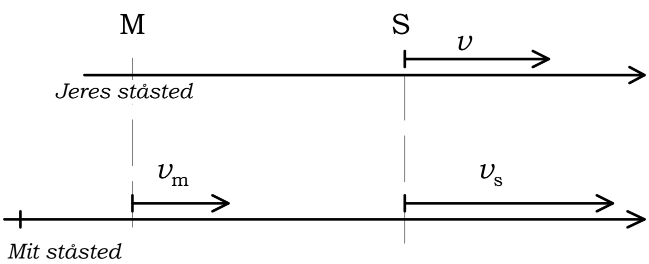
eller endelig

$$v_s = \frac{v_m+v}{1+\frac{v_m v}{c^2}}. \tag{17}$$

Når hastighederne er små i forhold til c, har vi den klassiske sammenhæng

$$v_s = v_m + v. \tag{17'}$$

Vi ser nu følgende sammenhænge



I står sammen med modtageren M og ser senderen S bevæge sig med hastigheden v.

Jeg ser M bevæge sig med hastigheden v_m og S bevæge sig med hastigheden v_s som er mindre end summen $v_m + v$ når relativistiske effekter må tages i betragtning.

Det ses af (17) at

$$v_s \to c \text{ for } v \to c$$

og

$$v_s \to c \text{ for } v_m \to c$$

sådan som det må være!

Hvorimod (17') jo muliggør overlyshastigheder.

14. Relativistisk Dynamik

På grundlag af denne opfattelse af rummet og tiden vender vi os nu mod dynamikken. Hvilke begreber og synsmåder kan beholdes som de er i den klassiske fysik, og hvilke må modificeres?

Vi kan blive klogere på disse spørgsmål ved at se på et simpelt stød, for hvilket vi først udleder en rent kinematisk kendsgerning ved (17):

To ens partikler A og B støder fuldstændigt uelastisk sammen, dvs. at de efter stødet følges ad som C.

Referenceramme 1:

Stødet iagttages i referenceramme 1 som er i hvile i forhold til B. Hastigheden af A før stødet kaldes her v. Hastigheden af C kaldes her u.

Referenceramme 2:

Stødet iagttages også fra referenceramme 2 hvori C ligger stille. u bliver så den relative hastighed mellem de to referencerammer.

På tegningen er det valgt at lade referenceramme 1 være i hvile i forhold til papiret.

Men hastigheden af referenceramme 1 og dermed af B er også u set fra reference 2.

Da de to partikler er ens og ligger stille efter stødet, må endelig også A have hastigheden u her.

Af figurerne kan nu ses følgende:

u er hastigheden af
A set fra ref.ramme 2

u er hastigheden af
ref.ramme 2 set fra ref.ramme 1

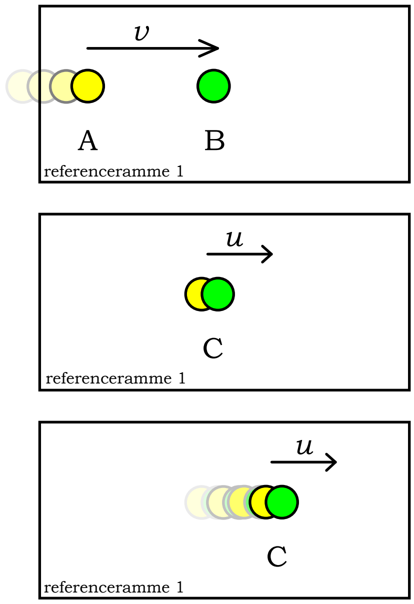
v er hastigheden af
A set fra ref.ramme 1.

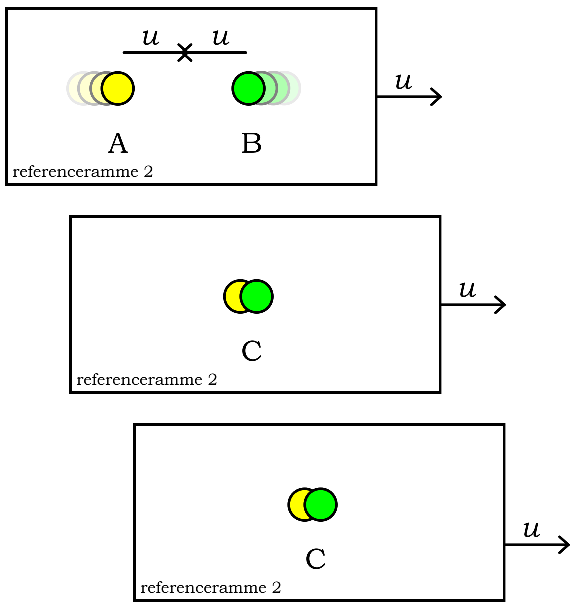
v er altså sammensætningen af u og u så vi ifølge (17) har

$$v = \frac{2u}{1+\frac{u^2}{c^2}} . \qquad (18)$$

Det var kinematikken.

De fundamentale begreber i den klassiske mekanik er længde, tid, masse og kraft. Ved disse kan andre begreber som hastighed, impuls og mekanisk energi udtrykkes.





Længde, tid, masse og kraft er ens for alle iagttagere i den klassiske fysik.

Vi har nu set at i relativitetsteorien vil to iagttagere der bevæger sig i forhold til hinanden, ikke finde samme værdier for længder og tidsrum.

Størrelsen af hastighed, impuls og energi er allerede i den klassiske fysik forskellige for to iagttagere der bevæger sig i forhold til hinanden – fordi en given hastighed set af to iagttagere afviger med iagttagernes relative hastighed.

Forskellen på (17) og (17') må forberede os på at de formler hvorefter impuls og energi beregnes ud fra bl.a. hastigheden nok skal ændres.

Når vi tager fat på dynamikken, må vi åbne for relativistiske effekter i lighed med egenlængde og relativistisk længde og tilsvarende -tid. Derfor indfører vi egenmassen, som også kaldes hvilemassen, m_0, massen af et legeme målt af en iagttager der er i hvile i forhold til legemet, og den relativistiske masse m målt af en iagttager der bevæger sig i forhold til legemet.

Den relativistiske dynamik er succesfyldt opbygget med opretholdelse af de centrale bevarelsessætninger for masse, energi og impuls. Og med en impuls defineret som i den klassiske fysik dog med den relativistiske masse, altså

$$p = m\,v. \tag{19}$$

Vi bruger nu bevarelsessætningerne på de to ens partikler på foregående side. Deres hvilemasse kaldes m_0 og med m betegner vi den relativistiske masse som formodes at afhænge af den relative hastighed v mellem legeme og iagttager.

I det følgende står m for $m(v)$, dvs. den relativistiske masse af A i referenceramme 1. Samme sted ser vi at m_0 er hvilemassen for B. Massebevarelsen i referenceramme 1 giver at

C har massen $m + m_0$

Ligeledes i referenceramme 1 giver impulsbevarelsen derfor

$$m\,v + m_0 = (m_0 + m)\,u$$

$$\Leftrightarrow\ m\,v = (m_0 + m)\,u = p$$

hvor p altså er impulsen (bevaret) i reference 1.

Heraf findes

$$u = \frac{m}{m_0+m}\,v$$

hvormed (18) kan omskrives

$$v = \frac{2u}{1+\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\Leftrightarrow\ v + v\,\frac{u^2}{c^2} = 2\,\frac{m}{m_0+m}\,v$$

$$\Leftrightarrow\ 1 + \frac{u^2}{c^2} = 2\,\frac{m}{m_0+m}$$

$$\Leftrightarrow\ 1 + \frac{m^2}{(m_0+m)^2}\,\frac{v^2}{c^2} = 2\,\frac{m}{m_0+m}$$

$$\Leftrightarrow\ (m_0+m)^2 + m^2\,\frac{v^2}{c^2} = 2\,m\,(m_0+m)$$

$$\Leftrightarrow\ m_0^{\,2} = m^2\,(1-\frac{v^2}{c^2})$$

$$\Leftrightarrow\ m_0 = m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Leftrightarrow\ m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0\,\gamma(v). \tag{20}$$

Ved sidste overgang er (15) brugt.

Idet vi nu erindrer at A og B var identiske, kan vi altså konkludere at den relativistiske masse er større end hvilemassen med den velkendte faktor $\gamma(v)$.

Da impulsen er bevaret, er den en mere fundamental størrelse end hastigheden. Ved i (20) at erstatte v med p gennem relationen (19) fås endeligt

$$m^2 = m_0^{\,2} + \frac{p^2}{c^2} \tag{21}$$

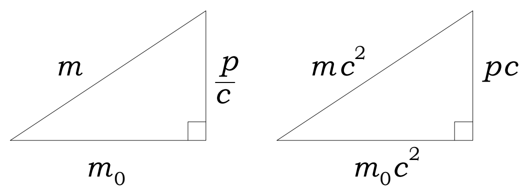
og

$$(m\,c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + (p\,c)^2 \tag{21'}$$

som udtrykker en vigtig sammenhæng i to forskellige udgaver.

Betydningen af de enkelte led i den sidste udgave gives mening i næste afsnit. Og det viser sig (21) og (21') har samme indhold.

De kan huskes ved at leddene opfylder Pythagoras's læresætning når leddene anbringes som på figuren.



15. E_{kin}

Newtons 2. lov indgår i relativitetsteorien på den velkendte form

$$F_{\text{res}} = \frac{dp}{dt} \tag{22}$$

Endvidere gælder også udtrykket for den resulterende krafts effekt

$$\frac{d}{dt}E_{\text{kin}} = F_{\text{res}} \cdot v \tag{23}$$

i relativitetsteorien.

Vi tænker os nu at partiklen er påvirket af en resulterende kraft. Idet m_0 og c er konstante fås ved differentiation af (21) under anvendelse af (19)

$$c^2\, 2\, m\frac{dm}{dt} = 2\, p\frac{dp}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(mc^2) = v\, F_{\text{res}} = \frac{d}{dt}E_{\text{kin}}$$

Heraf udleder vi at

$$E_{\text{kin}} = m c^2 + \text{konstant}$$

Når $v = 0$ er $m = m_0$ og $E_{\text{kin}} = 0$. Konstanten må altså være $-m_0c^2$ hvoraf

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= m c^2 - m_0 c^2 \\ &= (m - m_0)c^2 \end{aligned} \tag{24}$$

16. Korrespondensprincippet

Kvantemekanikken og relativitetsteorien gør ikke den klassiske mekanik ugyldig i det område hvor den har virket med så stor succes. Men de inddrager erfaringer fra områder hvor den klassiske mekanik ikke har været bragt i anvendelse.

Kvantemekanikken og relativitetsteorien udvider altså anvendelsesområderne ud over de hvor den klassiske mekanik virker. Den klassiske mekanik skulle derfor gerne for relativitetsteorien optræde som grænsetilfælde hvor $v \ll c$.

Det kigger vi på.

(21) omskrives til

$$(m+m_0)(m-m_0) = \frac{p^2}{c^2}$$

For $v \ll c$ er $m \approx m_0$ som med (24) giver

$$2m_0E_{\text{kin}} = p^2$$

som vi kender fra den klassiske fysik.

Med $p = m_0 v$ fås

$$E_{\text{kin}} = ½\, m\, v^2$$

som også må være set før.

I den anden ende, $v \to c$ kan man overveje om (22) er forenelig med c som uoverskridelig hastighed.

Ifølge (22) vil en konstant resulterende kraft give en lineært voksende impuls.

I den klassiske mekanik hvor m er konstant betyder det at hastigheden vokser ud over alle grænser.

Men i relativitetsteorien gælder at $m \to \infty$ for $v \to c$. Derfor kan p i (19) vedblivende vokse lineært uden at v overskrider c.

17. Energi-masse-ækvivalens

(24) kan skrives

$$m = m_0 + \frac{E_{\text{kin}}}{c^2}$$

som viser at kinetisk energi bidrager med masse efter division med c^2.

Og det gør al energi således at det faktisk ikke er muligt at skelne mellem energi og masse. De to bevarelsessætninger kan erstattes af en: massebevarelse – eller energibevarelse, om man vil. Altså masse-energi-bevarelse.

Situationen belyses med et eksempel:

Vi betragter en kasse med hvilemasse m_0. Hvis den er i hvile i forhold til os, er dens masse m_0 og dens $E_{\text{kin}} = 0$. Hvis den bevæger sig, er $m > m_0$, og den adlyder beskrivelsen i forgående kapitler hvor E_{kin} altså er at betragte som translatorisk kinetisk energi af kassen som helhed.

Den ligger nu med hvilemasse m_0 foran os.

Så åbner vi den! og ser at der indeni er et svinghjul med stor omdrejningshastighed. I hvilemassen indgik altså uden at vi kunne iagttage det udefra, den kinetiske energi E_{rot} af dette svinghjul.

Hvis vi tapper E_{rot} ud af kassen, reduceres dens hvilemasse med E_{rot}/c^2. Denne masse, E_{rot}/c^2, vil følge energimængden E_{rot} og kunne registreres dér hvor energien afleveres.

Hvis svinghjulet bremses og energien bliver til indre energi (temperaturstigning) inden i kassen, vil kassens hvilemasse være uændret.

Hvis der er en kraftig fjeder som optager E_{rot} og afleverer den igen i form af rotation den anden vej (som en uro i et gammeldags armbånds- eller lommeur), så er kassens hvilemasse ligeledes uændret.

Vi kan altså ikke udefra afgøre om kassens hvilemasse udgøres af stilleliggende stof eller energi.

Nu er der jo også "spændte fjedre" i stilleliggende stof, f.eks. i ^{235}U-kerner. En termisk neutron kan udløse disse fjedre, og den potentielle energi mellem ^{235}U-kernens nukleoner som bidrog til ^{235}U-kernens hvilemasse, omdannes til kinetisk energi i fissionsfragmenterne hvis samlede hvilemasse altså er mindre end ^{235}U-kernens. Der gælder

$$Q = -\Delta m c^2$$

hvor Δm er partiklernes tab i hvilemasse.

For et system er den totale energi mc^2 som kan opdeles i ydre kinetisk energi (24) og hvilemasseenergi $m_0 c^2$. Den sidste kan igen bestå af forskellige energiformer og delsystemers hvilemasse som måske blot også er energi (af en art som vi ikke kender i andre sammenhænge), se f.eks.

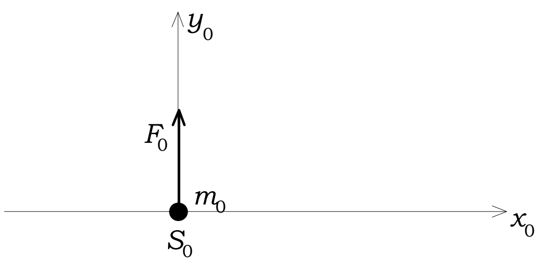
http://www.science-spirit.org/articles/Articledetail.cfm?article_ID=126

18. Transformation af kraft

En sidste sammenhæng fra den relativistiske mekanik skal udledes fordi den er afgørende for næste meget interessante afsnit!

Vi skal se på transformation af en kraft som står vinkelret på den relative bevægelse.

Vi betragter en partikel med massen m_0 som fra starten ligger stille i koordinatsystemet S_0.

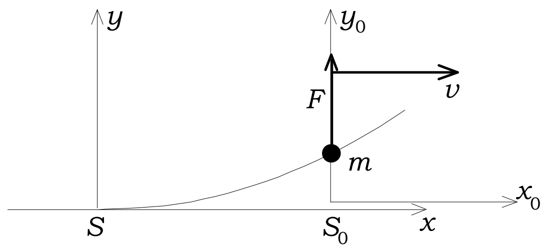


Hvilemassen m_0 er således partiklens masse i S_0. Den er påvirket af en lodret, konstant kraft som i S_0 beskrives ved F_0, og m_0 får derfor en lodret acceleration $a_0 = F_0 / m_0$. Vi betragter den i så kort tid at den slet ikke opnår relativistiske hastigheder. Der sker derfor ingen ændringer som følge af relativitetsteorien i m_0, F_0 og a_0 mens vi tænker videre.

Der gælder i S_0

$$y_0 = ½\, a_0\, t_0^2 = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m_0} t_0^2$$

hvor t_0 er egentiden for en iagttager der bliver siddende i S_0.



Vi betragter nu samme partikel set fra et koordinatsystem S hvorfra S_0 ses at bevæge sig med den store hastighed v i x-aksens retning. Partiklens masse er nu m. Den lodrette kraft beskrives i S ved F, den lodrette acceleration bliver $a = F/m$.

Der gælder

$$y = ½\, a\, t^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

hvor t er tiden i S. Da imidlertid $y = y_0$ (bevægelse vinkelret på den relative bevægelse) gælder

$$\frac{1}{2} \frac{F_0}{m_0} t_0^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

hvoraf

$$F = F_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (23)$$

hvor (1), (2) og (20) er brugt.

19. Magnetisk felt som relativistisk følge af elektrisk felt

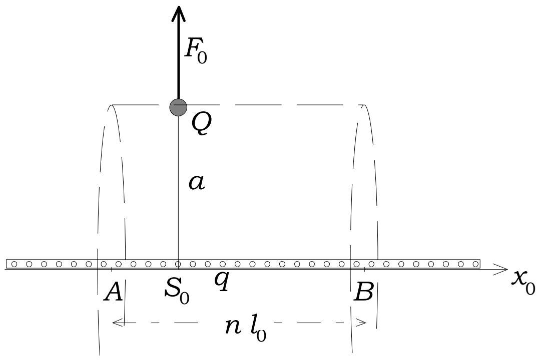
Magnetfelter opstår som følge af elektriske strømme, d.v.s. ladninger der bevæger sig.

Hvis man følger med disse ladninger, er der ikke noget der bevæger sig, dvs. ingen strøm, og man må undre sig over hvor magnetfeltet så bliver af.

Det bliver væk! Til gengæld medfører relativitetsteorien at den elektriske kraft på en ladning uden for lederen ændrer sig med det beløb som mangler fra magnetfeltet. Den effekt der i et koordinatsystem optræder som en magnetisk kraft, optræder i et andet som en elektrisk.

Det vises lettest i denne rækkefølge: først ingen strøm, d.v.s. kun elektrisk felt, så begge dele, men kraften viser sig at være uændret!

Vi benytter de samme to systemer S_0 og S som i foregående afsnit



I S_0 ligger en uendelig lang stang med en jævn fordeling af lige store ladninger q.

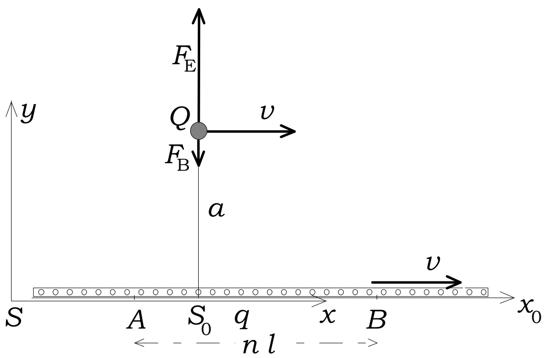
Mellem to mærker A og B på stangen er der afstanden l_0 og n ladninger.

Gauss's teorem i forbindelse med den viste cylinder samt definitionen af E medfører

$$E_0 = \frac{\Phi_0}{2\pi a l_0} = \frac{\frac{nq}{\varepsilon_0}}{2\pi a l_0},$$

$$F_0 = F_{E_0} = QE_0 = \frac{nqQ}{2\varepsilon_0 \pi a l_0}.$$

Set fra S har vi



Her er

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{og } a \text{ uændret.}$$

Gauss's teorem anvendt som før giver derfor

$$F_E = QE = \frac{nqQ}{2\varepsilon_0 \pi a l}.$$

Stående i S ser man en strøm I i stangen

$$I = \frac{nqv}{l}$$

idet l/v er den tid det varer for de n ladninger at passere et fast punkt i S.

Strømmen er ophav til et B-felt af størrelsen

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi a}\frac{nqv}{l},$$

$$F_B = QvB = \frac{\mu_0}{2\pi a}\frac{nqQv^2}{l} = \frac{nqQ\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\varepsilon_0 a l}$$

hvor vi har brugt $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$.

Vi antager at alle ladningerne er positive og finder at F_B er modsatrettet F_E. Så er det bare at regne:

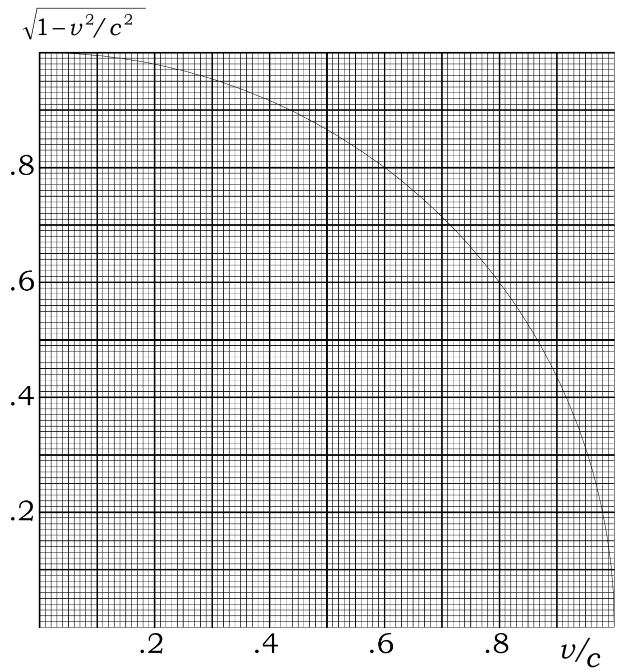
$$F = F_E - F_B = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{nqQ}{2\varepsilon_0\pi a l} = F_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

i overensstemmelse med (23).

Og så må det vist være nok for denne gang!

20. Opgaver

Som det er fremgået, angiver størrelsen $\sqrt{1-v^2/c^2}$ forholdet mellem de klassiske og de relativistiske udtryk. Det er derfor interessant at se, for hvilke hastigheder den afviger kendeligt fra 1.



Ved hastigheder under 10 % af lyshastigheden vil den relativistiske korrektion være under 1%.

Opg. 1. Check ovenstående figur.

Opg. 2. Beregn hastigheden for α-partiklen udsendt fra ^{238}U i den klassiske tilnærmelse. Vis hermed at den klassiske tilnærmelse er rimelig!

Opg. 3. Beregn den maksimale hastighed for β-partikler udsendt fra ^{234}Th i den klassiske tilnærmelse. Vis hermed at den klassiske tilnærmelse ikke er rimelig og brug det relativistiske udtryk til at finde v/c!

Opg. 4. (eksamen 99-7-1) En π^0-meson i hvile henfalder til to fotoner, der har samme bølgelængde. Massen af en π^0-meson er 0,1449 u.

Beregn henfaldsprocessens Q-værdi.

Bestem fotonernes bølgelængde.

Opg. 5. Myoner dannes i atmosfæren ved processer mellem den kosmiske stråling og luftens molekyler. De henfalder ved

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

med en middellevetid på $2\cdot10^{-6}$ s d.v.s. en halveringstid på $1{,}4\cdot10^{-6}$ s. Antallet af myoner, man registrerer ved havets overflade er ca. det halve af det antal man registrerer i 10 km's højde.

Beregn hastigheden ud fra disse tal! (Og den er jo gal!)

Middellevetiden måles i et system, hvor myonen er i hvile. Set fra jorden går der længere tid, således at hastigheden naturligvis bliver lavere end lysets.

Find denne hastighed.

Opg. 6. Beregn masseforøgelsen ved det makroskopiske stød i opgaven til 22.8.99.

Opg. 7. En 12 V bilakkumulator på 60 Ah oplades. Hvor meget øges dens masse?

Opg. 8. Når Enstedværket kører med maksimaleffekt på 630 MW elektricitet, fyres der ca. 1500 MW af i kedlen. Resten opvarmer Aabenraa fjord.

Hvor længe kunne Enstedværket køre på maksimal effekt på energien i 1 g vand, hvis vandet kunne konverteres fuldstændigt til energi efter Einsteins formel?

21. Stikordsregister