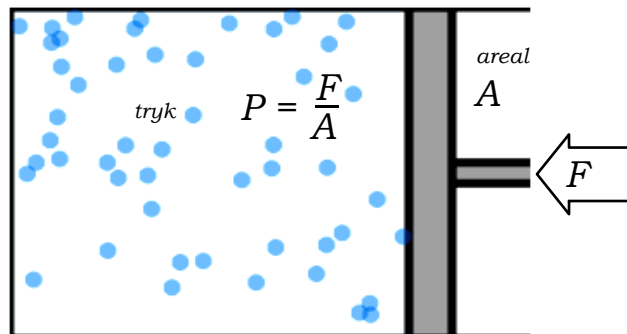
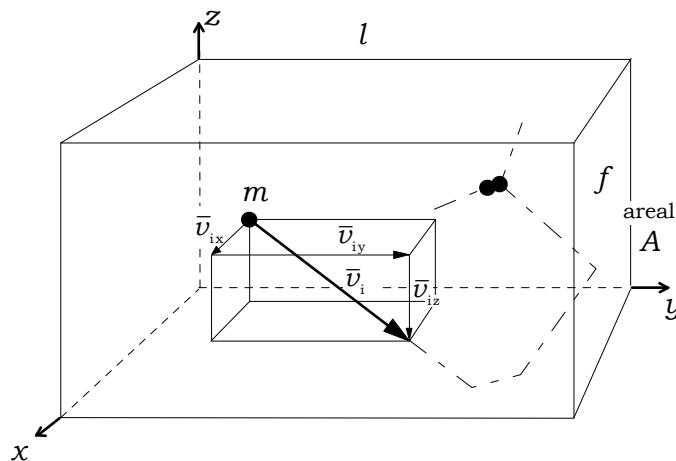


# Determinismen i den klassiske fysik



$$\frac{PV}{T} = nR$$

med Newtons love:



$$\frac{PV}{T} = nR \quad \text{med} \quad T = \frac{2}{3R} \frac{E_{\text{kin}}}{n}$$

# Indholdsfortegnelse

1.	Determinisme	1
1.1.	Makroskopisk determinisme	1
1.2.	Numerisk integration	2
1.2.1	Det frie fald	2
1.2.2	Det skrå kast med gnidning	3
1.2.3	Keplerbevægelser	4
2.	Gasser mikroskopisk set	5
2.1.	Tryk	5
2.2.	Boyle-Mariottes lov	6
2.3.	Gay-Lussacs lov	7
2.4.	Tilstandsligningen	7
3.	Mikroskopisk determinisme	9
3.1.	Diskussion af modellen	10
4.	Opgaver	11
5.	Stikordsregister	13
6.	Hjælpekemaer	15

## 1. Determinisme

Newtons love betød en afgørende ændring i videnskabens stilling.

Aristoteles anvendte et kraftbegreb, men den anvendelse han kunne gøre af det, var i meget højere grad beskrivende end forklarende, den var kvalitativ i højere grad end kvantitativ.

Ligeledes havde Aristoteles opstillet et årsagsbegreb (de 4 årsager) som ikke er velegnet til at udpege det vi i dag opfatter som naturens lovmæssigheder idet de indeholdt finale begrundelser, altså årsagen kunne findes i formålet.

Således var situationen endnu mens Galileis, Keplers og Huygens' analyser af de jordiske og himmelske bevægelser gav løfter om mulige større sammenhænge. Men disse måtte afvente yderligere afklaring både af kraftbegrebet og af de kinematiske begreber, først stedsændring, hastighed, så hastighedsændring, acceleration. (Med jeres erfaring fra differentialregning kan I måske ane hvor vanskelige disse begreber måtte være at udvikle fra bar bund. Vi vil senere se på hvordan Newton gjorde).

Det var så Newton der i det der er blevet kaldt videnskabshistoriens største enkeltmandspræstation, afsluttede 150 års frugtbar søgen efter nye indsigter. I Principia, 1687, åbenbarede han for den måbende verden en fælles ramme (de tre mekaniske grundlove og gravitationsloven) for forståelsen af alle de iagttagede bevægelser på jordoverfladen og i rummet.

Men Newtons love skulle vise sig anvendelige i sammenhænge langt ud over dem hvori de opstod.

En meget succesfuld anvendelse af lovene fandt sted i 1800-tallet hvor de (i den såkaldte statistiske mekanik) blev anvendt på den mikroskopiske verden. De blev med matematisk, statistiske metoder (middelværdier m.m.) anvendt på et ufatteligt stort antal molekyler - som ingen havde set og knap nok var overbevist om eksisterede - og førte til de empirisk kendte gaslove. (Se kap. 3).

Faktisk førte Newtons love til en opfattelse af verden som bestående af materielle mindstedele (senere specificeret som atomer og molekyler) i et absolut ellers tomt rum. De bevæger sig i forhold til hinanden i en absolut tid (rum og tid, jf. Kant) styret af kræfter som

det nu var videnskabens opgave at opdage og beskrive fuldstændigt. Newton havde selv vist vejen med sin lov for gravitationskræfter.

Hele dette videnskabelige gennembrud gav anledning til en grænseløs optimisme på videnskabens vegne. Det gik så vidt at fysikere i slutningen af 1800-tallet mente at de snart var færdige med at forstå naturen til bunds! (Det er en hybris der vist (heldigvis) er totalt enestående i kulturhistorien.)

Og det startede en naturbeherskelse og -erobring på det praktisk/tekniske plan som har bragt os i en situation fundamentalt forskellig fra alle tidligere civilisationers. Og som kan frygtes at være udslag af samme hybris. Hvor vigtigt det end er at forstå disse nye udfordringer, så er det et tredje aspekt der behandles i dette hæfte:

Det newtonske verdensbillede gav anledning til filosofiske diskussioner om en generel determinisme.

### 1.1. Makroskopisk determinisme

I har for en partikel set hvorledes begyndelsesbetingelserne og en konstant kraft entydigt giver en konstant accelereret bevægelse, Mekanik, 2.5. Dette simple tilfælde kan vi løse eksakt. Det er nemlig så simpelt at man kan få jer til at integrere to gange uden at I opdager det! Når I lærer at integrere, vil I kunne behandle flere i praksis betydningsfulde situationer.

Men med en metode kaldet numerisk integration kan I indse at en bevægelse af en partikel med fastlagte begyndelsesbetingelser og med en vilkårligt varierende kraft forløber på en bestemt *determineret* måde hvis blot *kraften hele tiden kan findes ud fra tiden, partiklens sted og dens hastighed*. De eksempler vi snart regner på, vil vise at tid, sted og hastighed er hvad vi må forvente at skulle kende for at finde kraften.

Her skal Mekaniks opgave 16 regnes med en  $y$ -akse orienteret positivt opad og startstedet i  $y=8$  og med  $g=10$ . Enheder? Vi forudsætter SI's grundenheder. Dernæst regner vi opgave 16 med numerisk integration og glæder os efterfølgende over at vi får samme resultat. Så tør vi stole på metoden og bruge den i mere komplicerede tilfælde.

## 1.2. Numerisk integration

Metoden bruges i høj grad i praksis nu om stunder. I så fald udledes principperne af moderne differentialregning. Men den kommer til at ligne den måde hvorpå Newton - som måtte opfinde differential- og integralregning - greb sine overvejelser an på. Det vil senere blive demonstreret.

Så snakker vi moderne: Vi bruger differenskquotienter i stedet for differentialquotienter. Dermed bliver metoden ikke eksakt i praksis, men nærmer sig vilkårligt eksakthed når  $\Delta t$  går mod nul. Vi har

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{hvoraf} \quad \Delta x = v \Delta t,$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{hvoraf} \quad \Delta v = a \Delta t.$$

Begyndelsesbetingelserne kaldes  $x_0$  og  $v_0$  til tiden  $t=0$ . Ifølge s.1 kan vi altså finde kraften  $F_0$  fra starten. Newtons 2. lov tillader os straks at udregne accelerationen ved  $a_0 = F_0/m$ .

Vi vælger et lille  $\Delta t$  og ser nu på tidspunktet

$$t_1 = 0 + \Delta t.$$

I tidsrummet  $[0; t_1]$  har  $v$  fået en tilvækst

$$\Delta v = a_0 \Delta t.$$

Til tidspunktet  $t_1$  er hastigheden derfor

$$v_1 = v_0 + \Delta v.$$

I tidsrummet  $[0; t_1]$  vokser  $v$  fra  $v_0$  til  $v_1$ . Det er smart at bruge middelværdien  $\frac{1}{2}(v_0 + v_1)$  i udregningen af  $\Delta x = v \Delta t$  så at

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) \Delta t.$$

Til tidspunktet  $t_1$  er stedet derfor

$$x_1 = x_0 + \Delta x.$$

Så har vi  $t_1$ ,  $x_1$  og  $v_1$  således at vi kan finde  $F_1$  og dermed  $a_1$  til tidspunktet  $t_1$ , hvorefter vi klemmer på en gang til med dette udgangspunkt. Altså

$$t_2 = t_1 + \Delta t,$$

$$v_2 = v_1 + \Delta v \quad \text{hvor} \quad \Delta v = a_1 \Delta t,$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x \quad \text{hvor} \quad \Delta x = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \Delta t,$$

og så går det bare derudad!

### 1.2.1 Det frie fald

De viste formler refererer til en  $x$ -akse. Som den lodrette akse for det frie fald vælger vi nu en  $y$ -akse. Brug den viste metode til at udfylde skemaet s. 15. Brug  $\Delta t = 0,1$  og begyndelsesbetingelser som i Mekanik, opg. 16.

Når de trivielle manøvrer begynder at gå en på, får man den tanke at Excel måske vil kunne klare opgaven. Og det kan den. Prøv

<http://www.statsskolen.dk/fify/Elever/Fy/NumIntFritFald.xls>

Uddrag heraf:

	A	B	C	D	E	F
2	$\Delta t = 0,1$					
3	$t$	$y$	$\Delta y$	$v$	$\Delta v$	$a$
4	0	8		10		-10
5	=A4+\$B\$2	=B4+C5	=(D4+D5)/2*\$B\$2	=D4+E5	=F4*\$B\$2	=F4
6	=A5+\$B\$2	=B5+C6	=(D5+D6)/2*\$B\$2	=D5+E6	=F5*\$B\$2	=F5
7	=A6+\$B\$2	=B6+C7	=(D6+D7)/2*\$B\$2	=D6+E7	=F6*\$B\$2	=F6

giver

$\Delta t = 0,1$					
$t$	$y$	$\Delta y$	$v$	$\Delta v$	$a$
0	8		10		-10
0,1	8,95	0,95	9	-1	-10
0,2	9,8	0,85	8	-1	-10
0,3	10,55	0,75	7	-1	-10

Klart, ikke?

Sammenlign med din på s. 15 og med den eksakte behandling.

Det var jo simpelt at finde  $F$  og  $a$ . (Og det var derfor vi kunne løse problemet eksakt).

Samme sted findes

NumInt.exe (228kByte)

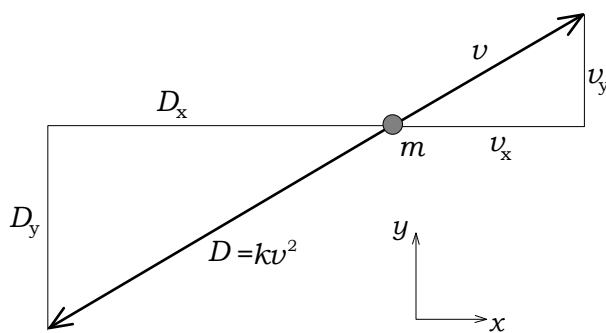
NumInt.xls (1,145 MByte)

som også indeholder Excel-behandling af de to følgende eksempler hvor kraften varierer og derfor skal udregnes på ny for hvert skridt.

### 1.2.2 Det skrå kast med gnidning

Lad os prøve et skråt kast med en gnidningsmodstand. En sådan vokser i almindelighed proportionalt med kvadratet på hastigheden (Er der nogen der husker nogle erfaringer med aerodynamik?)

Vi sætter størrelsen af gnidningsmodstanden til  $kv^2$ . Nu er der jo tale om en todimensional bevægelse, så vi må se på den lodrette og den vandrette bevægelse hver for sig. Idet vi indser at gnidningen  $D$  (drag bet. luftmodstand) er rettet lige modsat hastigheden, får vi



Af figuren ses

$$\frac{D_x}{D} = \frac{v_x}{v} \quad \text{og} \quad \frac{D_y}{D} = \frac{v_y}{v}$$

eller

$$D_x = D \frac{v_x}{v} = kv^2 \frac{v_x}{v} = kvv_x$$

og

$$D_y = kvv_y$$

hvor  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Kraften i den vandrette bevægelse bliver derfor

$$F_x = -kvv_x$$

og i den lodrette:

$$F_y = -mg - kvv_y$$

hvor vi kan sætte  $m = 1$ .

Ifølge  $F = ma$  får  $F$  og  $a$  derfor samme talværdi.

Brug skemaet s.16 og påbegynd udfyldning af skemaet for et skråt kast med luftmodstand med  $k = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,1$  og begyndelsesbetingelser

$$x_0 = 0, v_{x0} = 10, y_0 = 8 \quad \text{og} \quad v_{y0} = 10.$$

Og så skal Excel nok igen redde os:

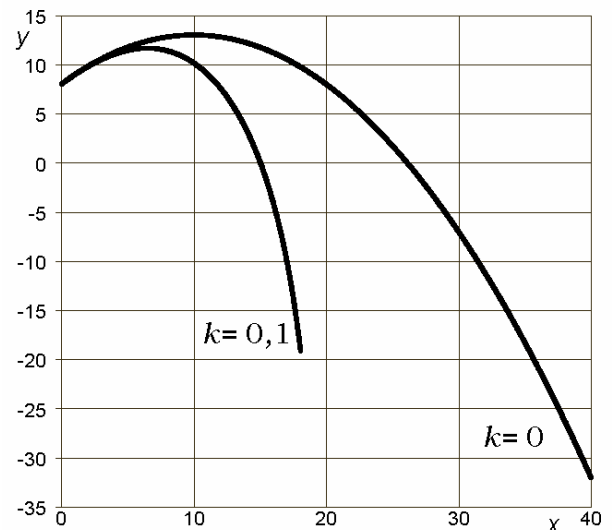
Så kan man eksperimentere med forskellige begyndelsesbetingelser og med forskellige størrelser af gnidningsmodstanden gennem  $k$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2	$\Delta t = 0,001$		$g = -10$		$k = 0,15$						
3	$t$	$x$	$\Delta x$	$v_x$	$\Delta v_x$	$a_x$	$y$	$\Delta y$	$v_y$	$\Delta v_y$	$a_y$
4	0	0		10		$=-F\$2*KVROD(D4^2+I4^2)*D4$	8		10		$=D\$2-F\$2*KVROD(D4^2+I4^2)*I4$
5	$=A4+\$B\$2$	$=B4+C5$	$=(D4+D5)/2*\$B\$2$	$=D4+E5$	$=F4*\$B\$2$	$=-F\$2*KVROD(D5^2+I5^2)*D5$	$=G4+H5$	$=(I4+I5)/2*\$B\$2$	$=I4+J5$	$=K4*\$B\$2$	$=D\$2-F\$2*KVROD(D5^2+I5^2)*I5$
6	$=A5+\$B\$2$	$=B5+C6$	$=(D5+D6)/2*\$B\$2$	$=D5+E6$	$=F5*\$B\$2$	$=-F\$2*KVROD(D6^2+I6^2)*D6$	$=G5+H6$	$=(I5+I6)/2*\$B\$2$	$=I5+J6$	$=K5*\$B\$2$	$=D\$2-F\$2*KVROD(D6^2+I6^2)*I6$

Uden gnidningsmodstand,  $k = 0$ , fås en parabel (kasteparabel).

Med gnidning får vi en kurve som kan ligne den tvungne bevægelse der kommer ud af Aristoteles's overvejelser om kampen mellem det som kastet har sat i gang og den naturlige bevægelse, lodret ned, som ender med at få overtaget, tekst 13 i Aristoteles' fysik. (Se hjemmesiden under Fy.)

For begge kast er der regnet indtil  $t = 4$ , dvs. 4 sekunder.



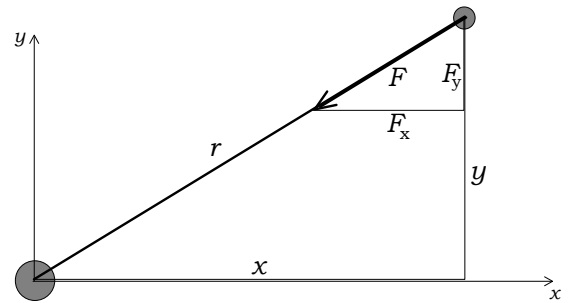
### 1.2.3 Keplerbevægelser

Vi kan nu med Newtons love vise at Keplers 3 love må gælde. Vi udregner ikke præcis netop Jordens bane, eller Mars'. Vi gør det generelt. Dvs. vi slår konstanterne sammen og simplificerer kraften således

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{k}{r^2}.$$

$k$  bliver et udtryk for tyngdekraftens størrelse eller massernes størrelse og  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Af følgende figur fremgår



$$\frac{F_x}{F} = \frac{x}{r} \quad \text{og} \quad \frac{F_y}{F} = \frac{y}{r} \quad \text{eller}$$

$$F_x = F \frac{x}{r} = -\frac{k}{r^2} \frac{x}{r} = -k/(x^2+y^2)^{1,5}x$$

$$\text{og} \quad F_y = -k/(x^2+y^2)^{1,5}y$$

Igen med  $m = 1$  bliver  $a = F$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2	$\Delta t =$	0,002	$k =$	1							
3	$t$	$x$	$\Delta x$	$v_x$	$\Delta v_x$	$a_x$	$y$	$\Delta y$	$v_y$	$\Delta v_y$	$a_y$
4	0	1		0		$= -D\$2/(\$B4^2+\$G4^2)^{1,5}\$B4$	0		1,3		$= -D\$2/(\$B4^2+\$G4^2)^{1,5}\$G4$
5	$=A4+\$B\$2$	$=B4+C5$	$=(D4+D5)/2*\$B\$2$	$=D4+E5$	$=F4*\$B\$2$	$= -D\$2/(\$B5^2+\$G5^2)^{1,5}\$B5$	$=G4+H5$	$=(I4+I5)/2*\$B\$2$	$=I4+J5$	$=K4*\$B\$2$	$= -D\$2/(\$B5^2+\$G5^2)^{1,5}\$G5$
6	$=A5+\$B\$2$	$=B5+C6$	$=(D5+D6)/2*\$B\$2$	$=D5+E6$	$=F5*\$B\$2$	$= -D\$2/(\$B6^2+\$G6^2)^{1,5}\$B6$	$=G5+H5$	$=(I5+I6)/2*\$B\$2$	$=I5+J6$	$=K5*\$B\$2$	$= -D\$2/(\$B6^2+\$G6^2)^{1,5}\$G6$

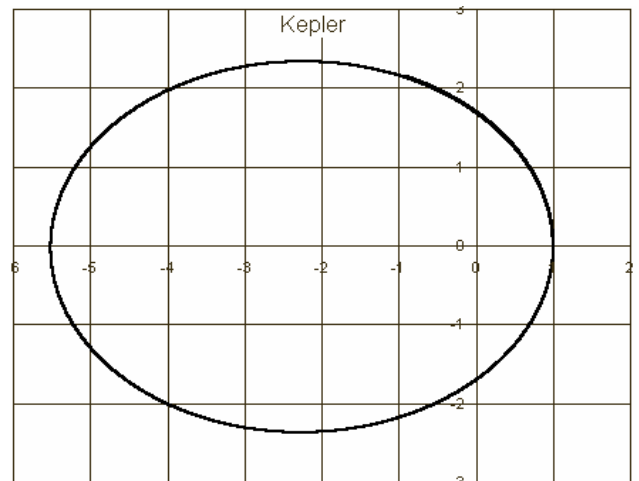
**Keplers 1. lov:** Planetbanerne er ellipser med solen i det ene brændpunkt. Se selv! (Solen er i (0, 0).)

**Keplers 2. lov:** Det af radiusvektor overstrøgne areal er proportionalt med tiden.

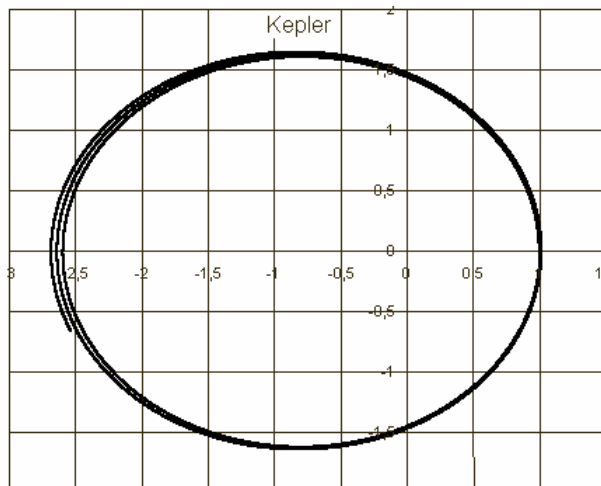
Man kan næsten se Keplers 2.lov mens Excel tegner.

**Keplers 3. lov:**  $\frac{T^2}{a^3}$  er den samme for alle planetbaner omkring solen. Regn opg. 1!

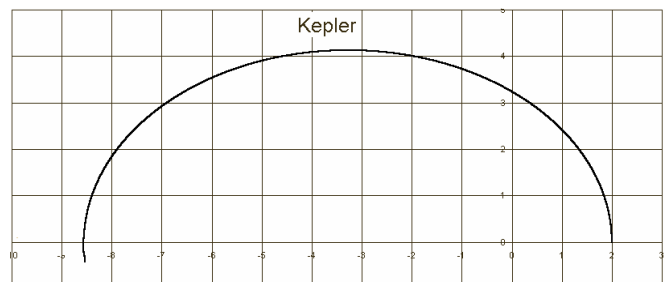
$t$	$x$	$\Delta x$	$v_x$	$\Delta v_x$	$a_x$	$y$	$\Delta y$	$v_y$	$\Delta v_y$	$a_y$
0	1		0		-1	0		1,3	0	0



$t$	$x$	$\Delta x$	$v_x$	$\Delta v_x$	$a_x$	$y$	$\Delta y$	$v_y$	$\Delta v_y$	$a_y$
0	1		0		-1	0		1,2	0	0



$t$	$x$	$\Delta x$	$v_x$	$\Delta v_x$	$a_x$	$y$	$\Delta y$	$v_y$	$\Delta v_y$	$a_y$
0	2		0		-0,25	0		0,9	0	0



## 2. Gasser mikroskopisk set

Efter nu at have set eksempler på hvorledes fremtiden kan forudsiges for en partikel når blot kraften på den hele tiden kan findes, så vil vi nu se hvorledes Newtons love har haft succes helt ned i det mikroskopiske. Og hvorledes mikrokosmos således kan tænkes at fungere deterministisk fuldstændigt som makrokosmos.

Ingen har set molekyler. Det er dog muligt at se meget direkte virkninger af deres eksistens. Allerede i 1827 - længe før molekylers eksistens og opførsel var anerkendt sådan som vi opfatter dem i dag - opdagede den engelske botaniker Robert Brown i et mikroskop at blomsterstøv i vand bevægede sig omkring i tilfældige zig-zagbevægelser.

I 1905 blev (ved Albert Einstein) de *brownske bevægelser* forstået som et resultat af vandmolekylernes bombardement af blomsterstøvet. Bevægelserne blev større når temperaturen steg. Dermed kunne temperaturbegrebet forstås *kvalitativt* i tæt tilknytning til disse bevægelser.

I 1800-tallet har den *statistiske mekanik* på grundlag af Newtons love givet beskrivelser af gasmolekyler på et mikroskopisk plan. Denne beskrivelse forklarer vist alle makroskopiske egenskaber for gasser. Beskrivelsen giver samtidig et grundlag for en hel præcis *kvantitativ* forståelse af *temperaturbegrebet*.

Vi kan faktisk selv på vores beskedne grundlag forstå mange af de egenskaber ved gasser som vi kan erfare os til gennem vores (makroskopiske) laboratorieøvelser. Vi skal blot forestille os molekyler som små kugler der bevæger sig rundt og støder indbyrdes sammen eller støder mod vægge ved fuldstændigt elastiske stød. (Dvs. at ingen kinetisk energi går til spilde ved sammenstødene. På dette punkt kan de små kugler ikke sammenlignes med makroskopiske kugler. Ved makroskopiske sammenstød vil en større eller mindre del af den mekaniske energi omdannes til indre, mikroskopisk, energi. For molekyler er der ikke noget mindre der kan optage energien som indre energi.)

Når molekylerne er meget langt fra hinanden i forhold til deres egen størrelse, kaldes gassen en idealgas. Det er vigtigt at have i tankerne at kuglerne er

ufatteligt små og forekommer i ufatteligt store antal i makroskopiske rumfang. Det drejer sig om  $6 \cdot 10^{23}$  i 24 L luft ved  $20^\circ\text{C}$  og 1 atm (ét mol).

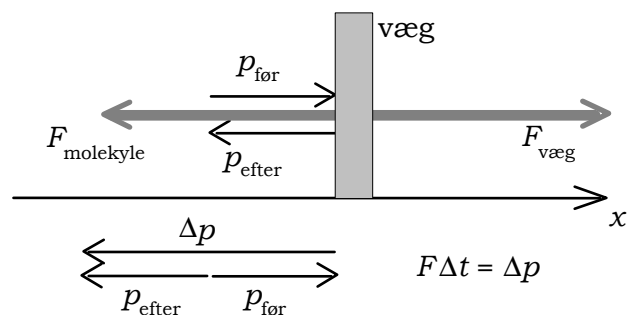
De bevæger sig ved almindelige temperaturer meget hurtigt ( $\approx 500$  m/s for luft ved  $20^\circ\text{C}$ , se link på rapport fra 17. dec. 2003), og tyngdekraftens indflydelse på deres bevægelse er helt forsvindende.

I vores beskrivelse af gasser bruger vi begreberne volumen, tryk og temperatur. Volumen behøver ingen forklaring. Tryk forklares i næste afsnit 2.1, og temperatur bliver fastlagt kvantitativt i afsnit 3, Mikroskopisk determinisme.

### 2.1. Tryk

Trykket af en gas kan forstås som resultatet af gasmolekylernes bombardement af en flade anbragt i gassen. Når gasmolekylerne ved sammenstød med fladen ændrer retning, så får de en ændring af bevægelsesmængde som jo kræver en kraft ifølge Newtons 2. lov.

Hvis et molekyle rammer direkte ind i en væg, springer det direkte tilbage med samme fart i modsat retning.



Et enkelt molekyle støder ind i en væg og tilbagekastes i modsat retning.

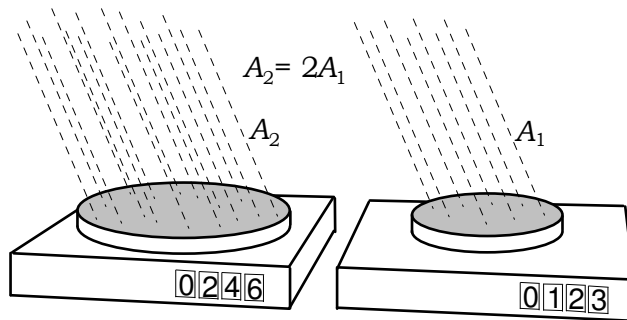
Vi kalder farten for  $v$ . I forhold til den viste  $x$ -akse er så

$$p_{\text{før}} = mv, \quad p_{\text{efter}} = -mv \quad \text{og} \quad \Delta p = -2mv.$$

Kraften fra væggen på molekylet er negativ lige som  $\Delta p$ . Kraften på væggen fra molekylet er derfor positiv (Newtons 3. lov). Kraften der giver denne ændring, virker meget kortvarigt mens molekylet er i berøring med væggen. Det er nu vigtigt at se for sig at hvis der er dette ufatteligt store antal molekyler der stedse rammer væggen, så vil de ufatte-

lig mange små kraftimpulser af væggen føles som en konstant kraft.

En god analogi at se for sig er en vægt stillet ud i et tæt haglvejr. (Hagl og ikke regn fordi haglene skal tænkes at hoppe op og væk fra vægtskålen så at der ikke ligger noget på vægtskålen og vejes med). Haglenes bombardement af vægtskålen vil få vægten til at vise at der er en kraftpåvirkning.



Proportionalitet mellem kraft og areal på to forskellige flader i samme haglvejr.

I det samme haglvejr vil kraften være proportional med arealet af vægtskålen hvorfor  $F/A$  vil være uafhængig af arealet.

I et kraftigere haglvejr vil  $F/A$  have en større værdi.  $F/A$  er et mål for haglvejrets intensitet.

Herefter vil følgende definition give god mening. Trykket  $P$  af en gas i en beholder defineres ved hjælp af arealet  $A$  af en flade af beholderen ved

$$P = \frac{F}{A} \quad (1)$$

hvor  $F$  er kraften på fladen.

SI-enheden for tryk er pascal

$$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Der er mange trykenheder i omløb. Vi giver her sammenhængen ved at angive den gennemsnitlige barometerstand  $B$  i forskellige enheder

$$\begin{aligned} 1 \text{ atm} &= 1013 \text{ hPa} \\ &= 1013 \text{ mBar} = 76 \text{ cmHg}. \end{aligned}$$

Se også Mekanikhæftet.

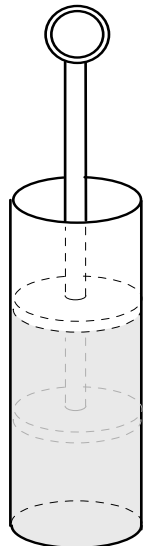
Opg. 2, 3

## 2.2. Boyle-Mariottes lov

Om temperaturen forudsætter vi at uændret temperatur betyder uændret gennemsnitlig molekylhastighed. Vi kan så forstå Boyle-Mariottes lov:

Hvis vi halverer rumfanget (stemplet presses halvt ned) for en indespærret idealgas, vil molekyltætheden fordobles. Antallet af molekylstød (hvert med uændret styrke når temperaturen er konstant) pr. tid mod en bestemt del af væggen fordobles. Derfor fordobles kraften på denne del af væggen, og trykket fordobles ifølge (1).

I en laboratorieøvelse får I lov til at bekræfte



En indespærret gas

For en indespærret idealgas gælder at

**$PV$  er konstant**

når temperaturen er konstant.

Boyle-Mariottes lov 1670

Altså: Hvis vi har en indespærret idealgas i to tilstande 1) og 2) med samme temperatur gælder

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad (2)$$

hvor  $(P_1, V_1)$  og  $(P_2, V_2)$  er sammenhørende værdier af tryk og volumen i de to tilstande.

Opg. 4



### 2.3. Gay-Lussacs lov

Hvis vi for konstant rumfang hæver temperaturen, vil molekylerne bevæge sig hurtigere. Det enkelte molekyle vil derfor oftere ramme en bestemt del af væggen. Samtidig vil det ske med større kraft. Således stiger altså kraften på denne del af væggen af to årsager, og trykket i beholderen stiger.

I en laboratorieøvelse kan I vise at trykket stiger proportionalt med den absolutte temperatur.

Gay-Lussacs lov kan herefter formuleres som følger:

For en indespærret idealgas gælder at

**$P$  er proportional med  $T$**

målt i kelvinskalaen  
når volumenet holdes konstant.

Gay-Lussacs (1778-1850) lov

For en given indespærret idealgas ved konstant volumen gælder altså

$$\frac{P}{T} \text{ er konstant} \quad (3)$$

når  $T$  måles i kelvinskalaen.

Har vi samme indespærrede idealgas i to tilstande 1) og 2), gælder derfor

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad (4)$$

hvor  $(P_1, T_1)$  og  $(P_2, T_2)$  er par af sammenhørende tryk og temperaturer i de to tilstande.

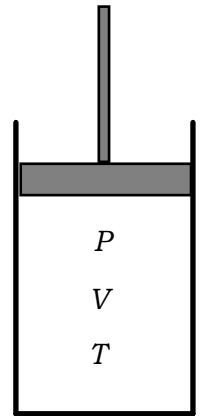
Opg.5

### 2.4. Tilstandsligningen

Boyle-Mariottes lov og Gay-Lussacs lov kan samles til en enkelt lov kaldet tilstandsligningen for ideale gasser.

Den udtaler sig om  $P$ ,  $V$  og  $T$  for ideale gasser. I den endelige udgave behøver de ikke at være indespærrede, men fra starten er de.

For at kunne ændre alle tre nævnte størrelser betragter vi gerne idealgasser indespærret i en cylinder under et stempel.



En indespærret gas i tilstanden  $(P, V, T)$

Et sæt  $(P, V, T)$  beskriver en tilstand af gassen.

Ifølge Boyle-Mariottes lov og Gay-Lussacs lov gælder følgende proportionaliteter:

$$P \propto T \quad \text{når } V \text{ er konstant,}$$

$$P \propto \frac{1}{V} \quad \text{når } T \text{ er konstant.}$$

Heraf følger at

$$P \propto \frac{T}{V}.$$

Der findes derfor en konstant så at

$$P = \text{konst} \cdot \frac{T}{V} \Leftrightarrow \frac{PV}{T} = \text{konst.}$$

For en indespærret idealgas gælder altså

$$\frac{PV}{T} \text{ er konstant} \quad (5)$$

som er tilstandsligningen for en indespærret idealgas.

Har vi en indespærret idealgas i to tilstande  $(P_1, V_1, T_1)$  og  $(P_2, V_2, T_2)$  gælder derfor

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (6)$$

Opg. 6-8

For at komme frem til den endelige form for tilstandsligningen skal vi droppe forudsætningen om at gassen er indespærret.

Dvs. vi skal betragte forskellige antal  $N$  af molekyler af en idealgas. Så vil brøken  $PV/T$  antage forskellige værdier.

Det er imidlertid oplagt at

$$V \propto N \quad \text{når } P \text{ og } T \text{ er konstante.}$$

Det betyder at størrelsen af brøken  $PV/T$  er proportional med  $N$ . Der findes derfor en konstant  $k$  så at

$$\frac{PV}{T} = kN \quad (7)$$

som er endnu en udgave af tilstandsligningen.

Vi inddrager her en umiddelbart forbløffende erfaring: Konstanten  $k$  afhænger *ikke* af den kemiske sammensætning af den betragtede idealgas.

Erfaringen kan formuleres således:

Forskellige idealgasser med samme volumen, tryk og temperatur indeholder lige mange molekyler.

Avogadros lov 1811

Den universelle konstant  $k$  i (7) kaldes Boltzmanns konstant.

Avogadros tal  $6,03 \cdot 10^{23}$  er det (overordentligt store) antal som kaldes 1 mol. Vi definerer endvidere Avogadros konstant (som ikke er noget tal) ved

$$N_A = 6,03 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Der gælder derfor

$$N = nN_A \quad (8)$$

hvor  $n$  er stofmængden (med enhed mol).

Gaskonstanten  $R$  defineres ved

$$R = kN_A \quad (9)$$

hvorefter

$$\frac{PV}{T} = nR \quad (10)$$

er den udgave af tilstandsligningen hvor alle størrelserne er makroskopiske.

Konstanterne findes på s. 14.

Af tilstandsligningen kan endnu en lovmæssighed udledes:

Vi betragter en indespærret idealgas ved konstant tryk  $p$ . Da den er indespærret er også  $n$  konstant.

Heraf følger at  $V/T$  er konstant. Altså

For en indespærret idealgas gælder at

**$V$  er proportional med  $T$**

målt i kelvinskalaen når trykket holdes konstant.

Gay-Lussacs 2. lov

Selv om der indtil Einsteins beskrivelse i 1905 af de browniske bevægelser var fysikere der var skeptiske over for ideen om stoffernes molekyllære opbygning, så arbejdede mange på grundlag af molekyler.

Problemet med molekylers eksistens var i forrige århundrede at de jo ikke kan iagttages.

Men man kan gøre nogle forudsætninger om deres mikroskopiske adfærd. På det grundlag kan man så prøve om man kan udlede noget om deres opførsel når de er i flok, altså udlede noget om deres makroskopiske egenskaber.

Vi vil i næste afsnit vise at (7) og (10) kan udledes af nogle meget simple forudsætninger vedrørende molekyler under anvendelse af Newtons love.

Dermed er (7) og (10) ikke mere empiriske love, men udledt af nogle mere fundamentale sammenhænge.

Forudsætningerne kaldes en model for en idealgas.

### 3. Mikroskopisk determinisme

- A. Den betragtede idealgas består af ens molekyler.
- B. Molekylerne er frie (d.v.s. uden påvirkning af kræfter) undtagen kortvarigt ved sammenstød indbyrdes eller med væggene.
- C. Alle stød er fuldstændigt elastiske.

Dette er et fuldstændigt realistisk grundlag, og på det kan regningerne i 3.g fysik højt niveau gennemføres fuldstændigt. (Se i øvrigt forsiden!)

For at komme lidt lettere igennem foretager vi nogle simplifikationer som er urealistiske, men som stadig viser principperne i anvendelsen af Newtons love på det mikroskopiske plan. Og så kommer vi tilmed frem til det rigtige resultat!

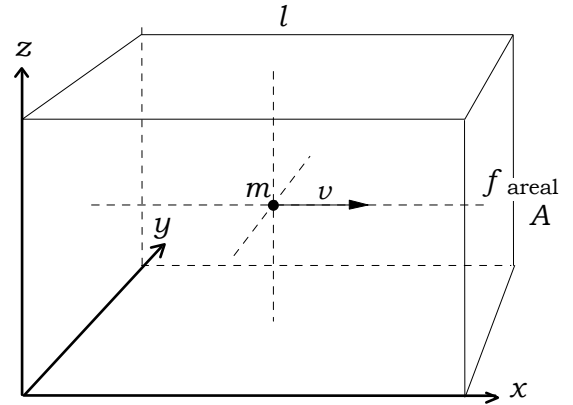
- A'. Den betragtede idealgas består af ens molekyler.
- B'. Molekylerne bevæger sig kun parallelt med akserne, altså i tre på hinanden vinkelrette retninger og med samme fart.
- Molekylerne er frie (d.v.s. uden påvirkning af kræfter) undtagen kortvarigt ved sammenstød med væggene.
- C'. Alle stød er fuldstændigt elastiske.

Antallet af molekyler kaldes  $N$ .

Gassen er indeholdt i en kasse som vist på figuren næste spalte. Vi tænker os kassen opdelt i terninger. I hver terning vil  $N/3$  af molekylerne ifølge B' bevæge sig parallelt med  $x$ -aksen. Dette må da også gælde for hele kassen.

Alle molekylerne har samme masse  $m$  og samme fart  $v$ .

Vi betragter molekylernes tryk mod fladen  $f$  som har arealet  $A$ . Beholderens længde kaldes  $l$ .



Vi betragter først et enkelt molekyle som bevæger sig frem og tilbage parallelt med  $x$ -aksen.

Vi vælger et tidsrum  $\Delta t$ .

I løbet af dette tidsrum vil molekylet bevæge sig strækningen  $v\Delta t$ . Da der er  $2l$  mellem to på hinanden følgende stød mod  $f$ , vil antallet af stød være  $v\Delta t/2l$ .

Hver gang det reflekteres fra fladen  $f$ , vil det ændre sin bevægelsesmængde med størrelsen  $2mv$ . (se s. 5)

Molekylets ændring af bevægelsesmængde som følge af stød mod  $f$  i tidsrummet  $\Delta t$  er derfor:

$$\Delta p_1 = 2mv \cdot v\Delta t/2l = mv^2\Delta t/l$$

Der er her tale om korte stød med relativ lang tid imellem. Men der er jo ufattelig mange molekyler i kassen. Væggen vil fra dem mærke et konstant bombardement.

I tidsrummet  $\Delta t$  vil de  $N/3$  molekyler som rammer mod  $f$ , få en ændring af bevægelsesmængde som er

$$\Delta p_{\text{alle}} = N/3 \cdot mv^2\Delta t/l$$

Kraften fra væggen på de  $N/3$  molekyler er derfor

$$F = \frac{\Delta p_{\text{alle}}}{\Delta t} = \frac{Nmv^2}{3l}$$

hvorfor væggen er påvirket af en lige så stor og modsatrettet kraft (Newtons 3. lov).

Trykket på væggen er derfor

$$P = \frac{F}{A} = \frac{Nmv^2}{3lA} = \frac{Nmv^2}{3V}$$

hvor  $V$  er beholderens volumen.

Hermed er vi på basis af vores model og Newtons love nået frem til et udsagn om de makroskopiske størrelser  $P$  og  $V$ .

$$PV = \frac{1}{3}Nm v^2 = \frac{2}{3}N \frac{1}{2} m v^2 \quad (11)$$

Om  $PV$  har vi tidligere (7) set at

$$PV = kNT$$

Heraf slutter vi at

$$\frac{2}{3}N \frac{1}{2} m v^2 = kNT$$

eller

$$\frac{1}{2} m v^2 (= \langle e_{\text{kin}} \rangle) = \frac{3}{2} kT \quad (12)$$

hvor parentesen betyder middelværdien af molekylernes kinetiske energier og viser det man kommer frem til hvis man ikke gør den grove forudsætning (i B) om samme fart til alle molekyler.

Med denne formel kan man beregne energien af det enkelte molekyle ved en bestemt temperatur.

Idet  $N \frac{1}{2} m v^2 = E_{\text{kin}}$  er hele gassen kinetiske energi, giver (11) også

$$PV = \frac{2}{3}E_{\text{kin}}$$

Her kan  $PV$  sammenlignes med (10) hvilket giver set at

$$\frac{2}{3}E_{\text{kin}} = nRT \quad (13)$$

som vi bruger til to ting. Først giver den en herlig kvantitativ forståelse af temperatur idet

$$T = \frac{2}{3R} \frac{E_{\text{kin}}}{n} \quad (14)$$

Temperaturen bliver hermed et mål for *gasmolekylernes kinetiske energi pr. mol*. ( $\frac{2}{3R}$  er konstant.)

Se, det var jo en helt anderledes tilfredsstillende definition af temperatur end den som indtil dette hellige øjeblik bare har været "det man måler på et kviksølvtermometer" - Og så på basis af Newtons love!

Til overflod lader resultatet sig let teste - og det er så den anden anvendelse af (13). Den naturlige forudsætning om de kortvarige stød betyder at den potentielle energi som kan være oplagret under stødene, er forsvindende i forhold til den kinetiske energi.

Vi vil derfor tro at den energi vi tilføjer, bliver til kinetisk energi, og vi får ifølge (13) følgende sammenhænge mel-

lem energitilførsel og temperaturstigning

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} R n \Delta T = c_V n \Delta T \quad (15)$$

hvor  $c_V = \frac{3}{2} R$  kaldes den molære varmemefylde ved konstant volumen.

(sml. med  $\Delta E = c m \Delta T$ .)

Modellen påstår altså at

$$c_V = \frac{3}{2} \cdot 8,21 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} = 12,3 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$$

### 3.1. Diskussion af modellen

Gas	$c_V / (\text{J/K} \cdot \text{mol})$	
	Ukendt kilde	Kay&Laby
He	12,56	12,76
Ne		12,67
Ar	12,56	12,48
Kr		12,31
Xe		12,48
H <sub>2</sub>	28,5	20,47
N <sub>2</sub>	25,1	20,77
O <sub>2</sub>	20,1	21,00
CO		22,44
NO	23,8	21,38
NO <sub>2</sub>		28,10
H <sub>2</sub> O	21,0	25,19
CO <sub>2</sub>	28,5	28,54
NH <sub>3</sub>		26,27

Tabellen viser at énatomige gasser svarer fint til modellen.

Kendsgerningerne i tabellen viser imidlertid også klart at der er noget vi har overset for fleratomige gasser. De skal have tilført mere energi for samme temperaturstigning.

Men det kan vi måske også godt forstå: Kuglesymmetriske atomer kan ikke rotere, men det kan fleratomige molekyler! Vi må derfor skelne mellem translatorisk og rotatorisk kinetisk energi. Og det betyder at energitilskud til fleratomige gasser også går til at sætte dem i rotation.

Når vi indtil formel (14) siger kinetisk energi betyder det altså *translatorisk*  $E_{\text{kin}}$ . Det er åbenbart den der bestemmer temperaturen. Også for fleratomige gasser.

## 4. Opgaver

Billede til opg. 3.



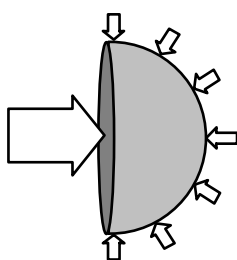
**Opg. 1.** Planetbanerne på s. 4 er alle tegnet på grundlag af 20 000 beregninger med  $\Delta t = 0,002$ . Det betyder at bevægelsen starter ved  $t = 0$  og slutter ved  $t = 40$ . De er alle beregnet med  $k = 1$  (dvs. samme sol).

- Find ud fra figurerne på s. 4 om-løbstiden  $T$  og gennemsnittet  $a$  mellem den mindste og den største afstand til solen, og kontroller Keplers 3. lov.
- Du er næppe tilfreds med resultatet. Men ved at gå i detaljer i Excels beregninger kan det gøres meget bedre. Prøv!

**Opg. 2.** Siden på en 1L mælkekarton måler  $7 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ .

- Hvor stor er kraften fra luften en dag hvor barometerstanden er 1 atm?
- Men den klasker ikke sammen?

**Opg. 3.** På en halvkugle som på figuren virker trykkrafterne i forskellige retninger. Men deres resultant er naturligvis lige så

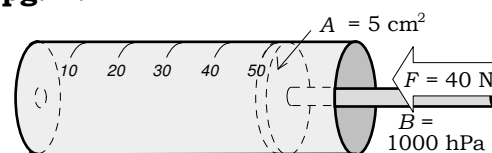


stor og modsatrettet kraften på den flade cirkulære overflade. Ellers ville halvkuglen bevæge sig som følge af barometerstanden.

De magdeburgske halvkugler lægges mod hinanden og luften indeni suges ud.

- Vurder kuglens størrelse ud fra den gamle tegning, og vurder den kraft der skal til at rive dem fra hinanden.
- Er der rimelighed i kuglens størrelse og hestenes antal?

**Opg. 4.**



En sprøjte med letglidende stempel har ved den aktuelle barometerstand på 1000 hPa voluminet  $50 \text{ cm}^3$ . Tværsnitsarealet er  $5 \text{ cm}^2$ .

Stemplet trykkes indad med en kraft på 40 N.

- Hvad bliver trykket inde i sprøjten?
- Hvad bliver voluminet?

**Opg. 5.** En cykelpumpes største volumen er  $182 \text{ cm}^3$ . En dag hvor barometerstanden er  $1032 \text{ hPa}$  presses luften i cykelpumpen sammen til  $38 \text{ cm}^3$  uden at kunne slippe ud.

a) Hvad er trykket i pumpen?

Luften fra pumpen presses samme dag fuldstændig ind i et dæk med volumen  $1,513 \text{ L}$  hvori trykket i forvejen var  $3067 \text{ hPa}$ .

b) Hvad ender trykket med at blive?

(Se først på gassen i pumpen og beregn hvad pumpens volumen er når trykket i pumpen er lig med trykket i dækket.

Gå herefter ud fra at ventilen åbner lige så snart trykket i pumpen overskrider denne værdi. Se så på al gassen i pumpe og dæk og beregn sluttrykket.)

c) Hvor mange procent steg trykket i dækket ved dette pumpeslag?

Cyklen blev pumpet ved  $20^\circ\text{C}$  og henstår herefter i solen og de sorte dæk får en temperatur på  $60^\circ\text{C}$ .

d) Hvad er så trykket i dækket?

**Opg. 6.** En idealgas har volumen  $1,4 \text{ L}$ , temperatur  $283 \text{ K}$  og tryk  $0,9 \text{ atm}$ . Den opvarmes til  $333 \text{ K}$  og presses sammen til  $1,0 \text{ L}$ .

a) Find dens tryk.

**Opg. 7.** En beholder indeholder en idealgas ved  $20^\circ\text{C}$  og med trykket  $123 \text{ atm}$ .

Ved opvarmning til  $100^\circ\text{C}$  konstateres det at dens volumen er vokset med  $10\%$ .

a) Find trykket i beholderen.

**Opg. 8.** Et gaslager til en bydel består af en beholder med let forskydeligt låg. Låget kan ikke modstå overtryk og lageret kan højst rumme  $10\,000 \text{ m}^3$  gas. Den ansvarlige skal for juni måned kalkulere med at barometerstanden kan variere mellem  $940$  og  $1060 \text{ hPa}$  og temperaturen i lageret mellem  $10^\circ\text{C}$  og  $40^\circ\text{C}$ .

En juninat ved  $12^\circ\text{C}$  hvor barometerstanden er  $1045 \text{ hPa}$  er han bange for

at der er ved at komme for meget gas i beholderen.

a) Kan du hjælpe ham med at finde ud af hvor meget der må være?

**Opg. 9.** Hvor meget fylder  $1 \text{ mol}$  idealgas ved  $20^\circ\text{C}$  og  $1 \text{ atm}$ ?

**Opg. 10.** Opgave 2 kan besvares ved at gøre beregninger over antallet af molekyler:

a) Beregn antallet af molekyler i pumpen ifald temperaturen er  $300 \text{ K}$ .

b) Beregn under samme forudsætning antallet af molekyler i dækket før pumpe­slaget.

c) Beregn herefter trykket i dækket.

**Opg. 11.** Gennemfør samme besvarelse for temperaturen  $270 \text{ K}$  (for at se at temperaturen intet betyder). Brug antallet af mol  $n$  i stedet for antallet af molekyler  $N$  (for at se at det kan man også!).

**Opg. 12.** Indledning:

I en varmluftballon opvarmes luften med en gasflamme op i en åbning for neden af ballonen. Trykket i ballonen er derfor det samme som udenfor. Af samme grund må ballonens volumen kunne betragtes som værende konstant.

Ved opvarmningen udvider luften sig og det der ikke er plads til, fiser ud for­neden.

**Og opgaven:**

Beregn hvor mange procent luften i en ballon taber i vægt når den opvarmes fra  $-10^\circ\text{C}$  til  $150^\circ\text{C}$ .

Og så  $64\,000 \text{ kr}$ -spørgsmålet:

Hvor stor skal ballonen være hvis den skal op og flyve i  $2000$  meters højde hvor trykket den pågældende dag er  $690 \text{ hPa}$ , temperaturforskellene er som ovenfor og den skal kunne bære  $300 \text{ kg}$ ?

(Atmosfærisk lufts molære masse er  $29 \text{ g/mol}$ .)

**Opg. 13.** Beregn hastigheden af et kvælstofmolekyle ved stuetemperatur.

## 5. Stikordsregister

- absolut rum;1  
 absolut temperatur;7  
 absolut tid;1  
 absolutte temperatur;7;8  
 acceleration;1;2  
 aerodynamik;3  
 areal;6;9  
 Aristoteles;1;3  
 atm;12  
 atom;1;10  
 atomer;10  
 Avogadros konstant;8  
 Avogadros lov;8  
 Avogadros tal;8  
 barometerstand;6;11;12  
 begyndelsesbetingelser;1;2;3  
 bevægelsesmængde;5;9  
 Boltzmanns konstant;8  
 Boyle-Mariottes lov;2;6;7  
 Brown;5  
 brownske bevægelser;5;8  
 brændpunkt;4  
 cykelpumpe;12  
 cylinder;7  
 determineret;1  
 determinisme;2;1;9  
 differenskvotient;2  
 differentialkvotient;2  
 differentialregning;1;2  
 Einstein;5  
 eksakt;1;2  
 énatomig;10  
 energi;5;10  
 Excel;2;3;4  
 filosofi;1  
 fleratomig;10  
 frit fald;2  
 fuldstændigt elastisk;5;9  
 Galilei;1  
 gas;5;6;7;10;12  
 gaskonstanten;8  
 gasmolekyler;5  
 Gay-Lussac s 2. lov;8  
 Gay-Lussacs 2. lov;8  
 Gay-Lussacs lov;2;7  
 gnidningsmodstand;3  
 gravitationsloven;1  
 haglvejr;5;6  
 hastighed;1;9  
 hybris;1  
 idealgas;5;6;7;8;9;12  
 indespærret;6;7;8  
 indespærret gas;6  
 indre energi;5  
 integrere;1  
 $k$ ;8  
 Kant;1  
 kasteparabel;3  
 kelvinskalaen;7;8  
 Kepler;1;4;11  
 Keplers 1. lov;4  
 Keplers 2. lov;4  
 Keplers 3. lov;4;11  
 kinetisk energi;5;10  
 kraft;1;2;4;5;6;7;9;11  
 kraftimpuls;6  
 kuglesymmetrisk;10  
 kviksølvtermometer;10  
 magdeburgske halvkugler;11  
 makrokosmos;5  
 makroskopisk;5;8  
 Mars;4  
 mikrokosmos;5  
 mikroskopisk;5;8  
 mikroskopisk determinisme;2;5;9  
 model;8;9;10  
 mol;5;8;10;12  
 molekyle;1;5;7;8;9;10;12  
 molekyler;7  
 molekylstød;6  
 molær varmfylde;10  
 mælkekarton;11  
 $n$ ;8;12  
 $N_A$ ;8;14  
 Newton;1;2  
 Newtons 2. lov;2;5  
 Newtons 3. lov;5;9  
 Newtons love;5  
 numerisk integration;1  
 overstrøget areal;4  
 $p_1$ ;7  
 Pa;6  
 pascal;6  
 planetbanerne;4;11  
 potentiel energi;10  
 Principia;1  
 $R$ ;8;10;14  
 radiusvektor;4  
 rotatorisk;10  
 sammenstød;5;9  
 skråt kast;3  
 solen;4;11;12  
 statistisk mekanik;1;5  
 sted;1;2  
 stempel;6;7;11  
 stofmængde;8

stød;9;10  
 temperatur;5;6;7  
 temperaturbegrebet;5  
 tilstandsligningen;7;8  
 translatorisk;10  
 tryk;5;6;7;8;9;12  
 trykenheder;6  
 tvungen bevægelse;3

tyngdekraft;4;5  
 $V$ ;7;8  
 varmluftballon;12  
 volumen;5;6;7;8;9;10;12  
 vægten;6  
 vægtskålen;6

## Konstanter

	Symbol	værdi	side
Avogadros konstant	$N_A$	$6,03 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	8
Avogadros tal		$6,03 \cdot 10^{23}$	8
$k$ , Boltzmanns konstant	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Pa m}^3}{\text{K}}$ $= 1,36 \cdot 10^{-25} \frac{\text{L atm}}{\text{K}}$	8,10
$N_A$ , Avogadros konstant	$N_A$	$6,03 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	8
$R$ , gaskonstanten	$R$	$8,31 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}}$ $= 0,0821 \frac{\text{L atm}}{\text{mol K}}$	8





